This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

3 3433 06246508 7

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

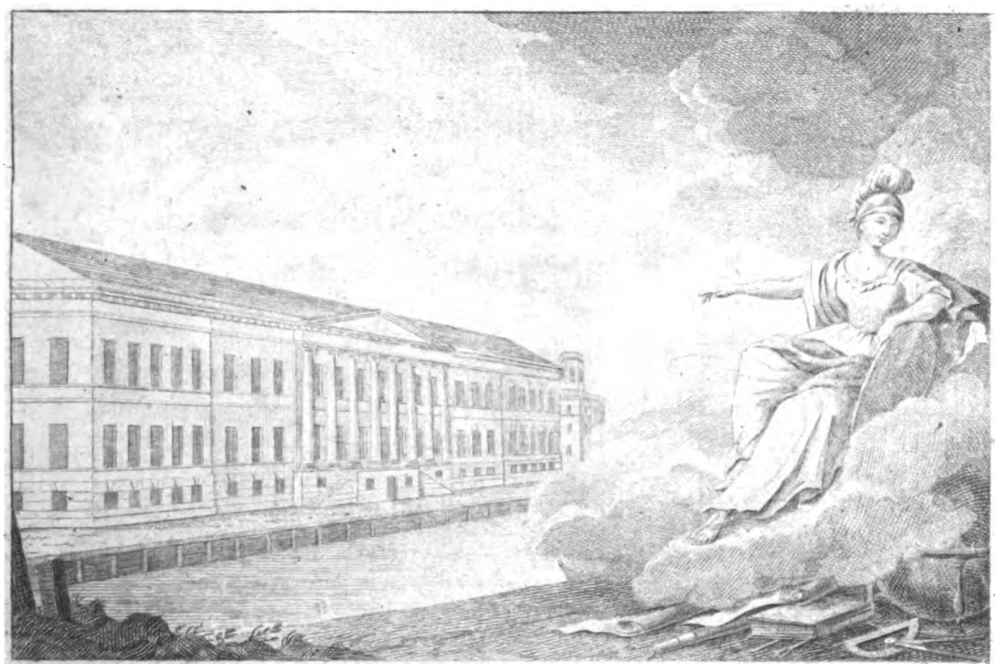
*QCB

Digitized by Google

Digitized by Google

NOVA ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE
TOMVS VII.

PRAECEDIT HISTORIA EIVSDEM ACADEMIAE AD ANNVM MDCCLXXXIX.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM MDCCXCIII.

ASTOR LIBRARY NEW-YORK

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

Année MDCCLXXXIX.

HISTOIRE. Pag.

Prolongation du Prix de Mathématique. - - - 3.
Viſite de Leurs Alteſſes Impériales Meſſeigneurs les Grand-Ducs Alexandre Pawlovitsh *&* Conſtantin Pawlovitsh, *& Aſſemblée extraordinaire.* - - 4.
Leçons publiques. - - - - - ibid.
Ouvrages académiques imprimés dans le courant de l'année. - - - - - 5.
Promotions - - - - - 6.
Morts - - - - - - 7.
Receptions - - - - - - - - 8.
Ouvrages, Machines & Inventions, Productions de la nature & de l'art, Antiquités & Curioſités, préſentés ou communiqués à l'Académie - - 9.

)(2 *Précis*

Pag.

Précis de la vie de Monſieur Jacques Bernoulli - - 23.

EXTRAIT *des mémoires contenus dans ce VII. Volume des Actes.* - - - - 33.

Claſſe de Mathématique - - - - 35.

Claſſe de Phyſico - Mathématique - - - 47.

Claſſe de Phyſique - - - - - 52.

Claſſe d'Aſtronomie - - - - - 64.

NOVA

Digitized by Google

NOVA ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS. TOMVS VII.

Cum Tabulis XII. aeri inciſis.

MATHEMATICA

Pag.

LEONH. EVLER. *De formulis differentialibus, quae per duas pluresue quantitates multiplicatae fiant integrabiles. Tab. I. fig. 1.* - - - - 3.

—— —— *Quatuor Theoremata maxime notatu digna in calculo integrali* - - - - - - - 22.

—— —— *De termino generali ſerierum hypergeometricarum* - - - - - - - 42.

—— —— *De iterata integratione formularum integralium, dum aliquis exponens pro variabili aſſumitur.* 64.

—— —— *Methodus facilis inueſtigandi radium oſculi, ex principio maximorum & minimorum petita. Tab. I. fig. 2.* - - - - - - - - - 83.

—— —— *Obſeruationes generales circa ſeries, quarum termini ſecundum ſinus vel coſinus angulorum multiplorum progrediuntur* - - - - - - 87.

—— —— *De integrationibus maxime memorabilibus ex calculo imaginariorum oriundis* - - - - 99.

—— —— *Supplementum ad Diſſertationem praecedentem, circa integrationem formulae* $\int \frac{z^{m-1}\partial z}{1-z^n}$, *caſu quo ponitur* $z = v(\text{coſ.}\,\Phi + \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\,\Phi)$ 134.

Digitized by Google

Pag.

F. T. SCHVBERT. *De proiectione ſphaeroidis ellipticae Geographica. Diſſertatio tertia. Proiectio paruae ſuperficiei telluris. Tab. I. fig. 3. 4. 5. 6. vna cum duabus Tabulis typis impreſſis* - - - 149.

NICOL. FVSS. *Obſeruationes variae circa integrationem aequationum homogenearum rationalium ſine variabilium ſeparatione perficiendam* - - - 162.

—— —— *Enodatio difficultatis ab Illuſt. Eulero in diſſertatione, de integrationibus memorabilibus ex calculo imaginariorum oriundis, Geometris propoſitae* 175.

PHYSICO-MATHEMATICA.

LEONH. EVLER. *De momentis virium reſpectu axis cuiuscunque inueniendis; vbi plura inſignia ſymptomata circa binas rectas, non in eodem plano ſitas, explicantur. Tab. II. fig. 1. 2. 3. 4. 5.* - 191.

—— —— *Methodus facilis omnium virium momenta reſpectu axis cuiuscunque determinandi. Tab. III. fig. 1. 2. 3. 4. 5.* - - - - - - 205.

WOLFG. LOUIS KRAFFT. *Analyſe des expériences faites en Ruſſie, ſur la longueur du pendule à ſecondes, ou le rapport de la péſanteur en différentes latitudes* - - - - - - - 215.

ALEXIS KONONOV. *De motu coni duplicis in altum ſponte aſcendentis. Tab. IV. fig. 1. 2. 3. 4. 5.* 229.

PHYSICA.

ERIC. LAXMANN. *Planta noui generis alpina, Parnaſſiae affinis. Tab. V. fig. 1. 2. 3. 4. 5.* 241.

LAVR.

Digitized by Google

Pag.

LAVR. CRELL. *Commentatio nouae nomenclaturae chemicae condendae, neceſſitatem & leges luſtrans* - 243.

BAS. SEWERGUINE. *Obſervations minéralogiques ſur quelques montagnes volcaniques des environs de Göttingue* - - - - - - - 265.

CASP. FRIED. WOLFF. *De tela dicta celluloſa, obſeruationes continuatae*: Cutis, *ſubſtantia ſubcutanea, adeps. Tab. VI. fig.* 1 — 11. - - - 278.

BASIL. ZVIEW. *Biga muraenarum, nouae Species. Muraena fuſca & alba. Tab. VII. fig.* 1. 2. 296.

BEN. FR. HERMANN. *Notice ſur le Schoerl rouge de Sarapoulskoi en Sibérie* - - - - - - 302.

BAS. SEWERGUINE. *Eſſay ſur les pierres de roche compoſées* - - - - - - - 313.

TOB. LOWITZ. *Methodus noua acetum concentrandi, eiusque acidum ad formam ſolidam cryſtallinam absque omni mixtione perducendi. Tab. IV. fig. 6. 7.* 330.

NICOL. OZERETSKOVSKI. *Déſcription des mines de Woëtzk, & Hiſtoire de leur exploitation* - 346.

PET. SIMON PALLAS. *Nouae Species plantarum, Amygdalus pedunculata, Pyrus elaeagrifolia, Aſtrantia maxima, Anciſtrum? apetalum. Tab. VIII. IX. X. XI. & XII.* - - - - - 353.

ASTRONOMICA.

STEPH. ROVMOVSKI. *Obſeruatio eclipſis Solis Anno* 1791 *die* 23 Mart. / 3 April. *Petropoli habita* - - 363.

WOLFG. LOUIS KRAFFT. *Méthode à la portée des navigateurs, pour réduire en diſtance vraie la di-*

ſtance

Pag.

ſtance apparente de la Lune au Soleil, ou à une étoile fixe - - - - - - - 365.

PETR. INOCHODZOW. *Obſeruatio eclipſis Solaris die* $\frac{23\ \text{Mart.}}{3\ \text{April.}}$ 1791 *Petropoli in ſpecula aſtronomica, Teleſcopio Shortii* $2\frac{1}{2}$ *pedum, facta. Tab. III. fig. 6.* - - - - - - - - - 378.

STEPH. RVMOVSKI. *De eclipſi Solis Anno* 1791 *die* $\frac{23\ \text{Mart.}}{3\ \text{April.}}$ *Petropoli obſeruata* - - - - 382.

PETRO INOCHODZOW. *Eclipſis Lunae partialis die* $\frac{30\ \text{Sept.}}{11\ \text{Oct.}}$ 1791, *Petropoli in ſpecula academica, tubo Dollondiano tripedali, obſeruata* - - 388.

J. ALB. EULER. *Extrait des obſervations météorologiques faites à St. Pétersbourg en l'année* 1789 *ſuivant le nouveau Stile* - - - - 390.

HISTOI-

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES
SCIENCES.

Digitized by Google

Digitized by Google

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPERIALE
DES SCIENCES
ANNÉE MDCCLXXXIX.

L'Académie avoit propoſé pour le Prix de cette année une queſtion purement mathématique, en demandant:

Si les fonctions arbitraires, auxquelles on parvient par l'intégration des équations à trois & pluſieurs variables, repréſentent des courbes ou ſurfaces quelconques, ſoit algébriques ou transcendantes, ſoit méchaniques, discontinues, ou produites par un mouvement volontaire de la main? ou ſi ces fonctions renferment ſeulement des courbes continues repréſentées par une équation algébrique ou transcendante?

Le terme du concours avoit été fixé au 1 Septembre, mais n'ayant pas reçu des réponſes entièrement ſatisfaiſantes, l'Académie jugea à propos de rémettre l'adjudication de ce Prix jusqu'en 1791, eſpérant qu'ils ſe trouveroit encore quel-

Digitized by Google

ques Géomètres, qui voudroient s'en occuper & communiquer à l'Académie leurs idées & recherches profondes.

Leurs Alteſſes Impériales Meſſeigneurs les Grand-Ducs Alexandre Pawlovitsh & Conſtantin Pawlovitsh s'étant fait annoncer pour voir l'Académie, Madame la Princeſſe de Daſchkaw convoqua une aſſemblée extraordinaire au mardi 4 Septembre, où ſe rendirent tous les Académiciens & Adjoints. Leurs Alteſſes accompagnées des cavaliers de Leur ſuite, après avoir viſité la Bibliothèque & le Muſée, ſe firent conduire à la ſalle d'Aſſemblées, où ſe trouverent expoſés divers Inſtrumens de Phyſique-expérimentale, dont M. le Prof. Krafft eut l'honneur de Leur démontrer le méchanisme & l'uſage. Ils y préterent la plus grande attention & daignerent aſſiſter avec intérêt aux expériences les plus curieuſes qui furent inſtituées en Leur préſence. Ils ſe retirèrent vers 2 heures après midi, témoignant à Madame la Princeſſe de Daſchkaw & à toute l'aſſemblée Leur ſatisfaction de la maniere la plus gracieuſe.

Mrs. les Académiciens & Conſeillers de Cour Kotelnikov, Ozeretskovski & Socolof continuerent de donner, pendant les mois d'été, des cours publics. Le premier enſeigna les Mathématiques, le ſecond la Minéralogie & le troiſième la Chymie expérimentale.

L'Académie publia vers la fin de cette année le premier volume de la traduction ruſſe de l'Hiſtoire naturelle générale du Comte de Buffon, à laquelle ont travaillé Mrs, les Académiciens de la nation, comme il a été dit dans la partie hiſtorique de ces Actes pour l'année 1787.

Les

Digitized by Google

Les autres ouvrages ſcientifiques qui ont paru en 1789 ſont:

Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae Tom. IV, qui comprend 18 mémoires de Mathématiques & de Phyſique, précédés de l'Hiſtoire de l'année 1786.

—— —— Tom. V, contenant 21 mémoires & l'hiſtoire de l'année 1787.

Zwo Abhandlungen über die Nutritionskraft, welche von der Kayſerlichen Academie der Wiſſenſchaften in St. Petersburg den Preis getheilt erhalten haben. Die erſte von Herrn Hofrath Blumenbach, die zwote von Herrn Profeſſor Born. Nebſt einer fernern Erläuterung eben derſelben Materie von C. F. Wolff, der Academie Mitglied. Pag. 63 & 94 in 4.

Mémoire ſur la nutrition préſenté à l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg, pour ſervir de réponſe à la queſtion phyſiologique propoſée pour le Prix de 1784 & renvoyée pour la ſeconde fois à l'année 1788. Ouvrage qui a obtenu l'acceſſit; par M. de Grimaud, Profeſſeur royal dans l'Univerſité de Médecine de Montpellier. Pag. 197. in 4.

Плоская и сферическая Тригонометрїя, c'eſt-à-dire: Elémens de la Trigonométrie plane & ſphérique, par M. le Conſeiller de Cour Gollovin, ancien Adjoint de l'Académie, imprimés in 4.

Сокращенїе Астрономїи или звѣздозаконїя г. де-Лаланда. Qui eſt une traduction ruſſe de l'abrégé de l'Aſtronomie de M. de la Lande; par M. le Conſeiller de Cour Gollovin, imprimé en 8.

Digitized by Google

Outre pluſieurs ouvrages ruſſes, hiſtoriques & inſtructifs, deſtinés à éclairer le public & à étendre la ſphère des connoiſſances utiles & agréables.

Deux des éléves Académiques, Mrs. Kononof & Sewergyne, que S. E. Madame la Princeſſe de Daſchkaw avoit envoyés à l'Univerſité de Göttingue en 1785, pour y achever leurs études, revinrent dans le courant de cet été, munis des bons certificats que leur y avoient donnés Mrs. les Profeſſeurs dont ils avoient fréquenté les leçons. Mrs. les Académiciens furent d'abord chargé de les examiner dans les ſciences, auxquelles ils ſe ſont voués par préférence, ce qui ayant été fait de vive voix à la ſatisfaction des examinateurs, ceux-ci leur donnèrent enſuite des thèmes pour compoſer des diſſertations académiques.

M. Kononof préſenta en conſéquence:

I. Specimen mathematicum de integratione aequationis differentio-differentialis $\frac{\partial\partial y (x^2 - 1)}{\partial x^2} + \frac{x \partial y}{\partial x} = nny$, tam per expreſſionem finitam quam per ſeries aſcendentes et deſcendentes.

II. Solutio problematis analytici: ſumto elemento ∂x conſtante, ſi fuerit $x + \frac{y \partial y}{\partial x} - s =$ Conſt. denotantibus $\frac{y \partial y}{\partial x}$ ſubnormalem, s vero arcum, inuenire relationem inter x et y, atque pro hac relatione adſignare locum geometricum.

M. Sewergyne ſouſmit les deux mémoires ſuivans:

I. Specimen mineralogicum de natura et origine Baſaltis.

II. Specimen chemicum de natura et differentia ſalium alcalinorum.

Mrs. les examinateurs ayant fait la deſſus un rapport favorable, Madame la Princeſſe de Daſchkaw fit recevoir ces

ces deux élèves au nombre des Adjoints de l'Académie; & nommément: M. Alexis Kononof pour les Mathématiques & M. Baſile Sewergyne pour la Minéralogie.

Ils furent introduits en cette qualité dans la ſéance Académique le 25 Juin.

Sur la propoſition de S. E. Madame la Princeſſe de Daſchkaw fut reçu le 19 Juin au nombre des Académiciens ordinaires, M. l'Adjoint Fréderic Théodore Schubert, Conſeiller titulaire & Géographe. Il avoit été nommé Adjoint pour les Mathématiques en 1786.

L'Académie a fait dans le cours de cette année quelques pertes, que nous allons indiquer, en commençant par celle d'un Académicien ordinaire, qui l'a affligée le plus.

M. Jacques Bernoulli, engagé à l'Académie depuis le 18 Septembre 1786, d'abord en qualité d'Adjoint en Mathématiques, & reçu enſuite au nombre des Académiciens ordinaires le 27 Septembre 1787, mourût d'un coup d'apoplexie, au moment qu'il ſe baigna dans la riviere, le 3 Juillet. Il fut ſincèrement régretté de Mrs. ſes confrères, ainſi que de tous ceux qui l'avoient connu: On va lire ci-après un précis de ſa vie littéraire. Suivent les Aſſociés externes qui ont terminé leur vie dans le courant de cette année.

M. Pierre Lyonet, Secrétaire des chiffres, Maître des Patentes & Interprète de L. H. P. les Etats-Généraux des Pais-bas, Membre de diverſes Académies. Décedé à la Haye le 10 Janvier, agé de 81 ans & demi. Il avoit été reçu au nombre des Académiciens externes le 4 Février 1762.

M.

Digitized by Google

M. Paul Thiery d'Holbach, Baron d'Heeze, Seigneur de Lende, Walber, Oſteryk &c. de l'Académie royale des Sciences & Belles-Lettres de Pruſſe, mourût à Paris le même 10 Janvier, agé de 66 ans. Il étoit né dans le Palatinat. On lui doit en grande partie les progrès rapides qu'a faits en France, l'Hiſtoire naturelle & la Chymie depuis environ 30 ans, par les traductions excellentes qu'il fit des meilleurs ouvrages allemands qui ont paru dans ces ſciences, & qu'il enrichit de ſes notes judicieuſes. Il fut reçu au nombre des aſſociés externes le 19 Septembre 1780.

M. Pierre Camper, ci-devant Profeſſeur en Medécine à Gröningue & Membre de diverſes Académies, mourût à la Haye, le 27 Mars, agé de 68 ans: il fut reçu au nombre des aſſociés externes le 29 Décembre 1776.

L'Académie reçut à la propoſition de S. E. Madame la Princeſſe de Daſchkaw:

Au nombre des Académiciens honoraires: le 7 Septembre, M. Alexandre Luſchkow, Aſſeſſeur de Collèges & Sous-Bibliothécaire de Sa Majeſté l'Impératrice.

Au nombre des Aſſociés externes:

I.) Le 29 Octobre, M. le Docteur Fréderic Guillaume Herſchel à Londres, célèbre par ſes teleſcopes & les découvertes auſſi importantes que merveilleuſes, qu'il a faites par leur moyen dans la région immenſe des Aſtres.

II.) Le 2 Novembre, le célèbre Benjamin Francklin à Philadelphie; Membre des principales Académies de l'Europe & fondateur de celles de l'Amérique.

OU-

Digitized by Google

OUVRAGES, MACHINES ET INVENTIONS, PRODUCTIONS DE LA NATURE ET DE L'ART, ANTIQUITÉS ET CURIOSITÉS,

préſentés ou communiqués à l'Académie. Année 1789.

Le Lundi 8 Janvier. Le Secrétaire perpétuel des Conférences académiques & Chevalier Euler a communiqué de la part de S. E. Mr. le Comte Anhalt, Aide de Camp Général de Sa Majeſté Impériale, une nouvelle carte deſſinée du Gouvernement de Simbirsk, pour la comparer avec celles de ce Gouvernement que l'Académie poſſède.

Le 12 Janvier. S. E. Mr. de Schouvalof, Grand-Chambellan de Sa Majeſté a envoyé pour la Bibliothéque de l'Académie le VI. Tome des mémoires de Pierre le Grand: Дѣянія Петра Великаго. *Par M. Iwan Golikof.*

M. Lowitz a préſenté & lu un mémoire intéreſſant ſur la concentration du vinaigre, qu'il a pouſſée à un degré auquel aucun chymiſte n'eſt parvenu jusqu'ici. Voyés les mémoires de la Claſſe phyſicale pag. 330.

Le 15 Janvier. M. l'Académicien Bernoulli a préſenté de la part de ſon frère, M. le Prof. Daniel Bernoulli de Bâle: *Lobrede auf Herrn Daniel Bernoulli, aus dem franzöſiſchen überſetzt und mit Anmerkungen begleitet. 8. Baſel.* 1787.

Le 26 Janvier. Le Secrétaire a lu une lettre de M. l'Académicien Bode de Berlin, ſur la cométe de 1661, qu'on attendoit de retour en 1789, & qui n'a pas paru.

Digitized by Google

Le 12 Février. M. Fuſs a lu la lettre de remerciment de M. Fries, Chirurgien-Major à Ouſtiug véliki, que l'Académie a reçu au nombre de ſes Correſpondans titrés.

Le 2 Mars. M. Lowitz a préſenté en manuſcrit: *Anzeige einer neuen ſehr vortheilhaften Bereitungsart des Vitriolaethers.*

Le 5 Mars. Le Secrétaire a lu une lettre très-gracieuſe de S. M. le Roi Fréderic-Guillaume II. de Pruſſe, datée de Berlin le 25 Février, qui accuſe la reception du 3e Volume des nouveaux Actes, que l'Académie Lui avoit fait préſenter.

Le 9 Mars. Le Secrétaire a remis le Programme publié par l'Académie hollandoiſe des Sciences de Haarlem, pour les Prix de l'année 1788. Enſuite de la part de M. le Docteur Schaeffer, une notice imprimée du froid extraordinaire qu'il a fait à Ratisbonue aux mois de Décembre & de Janvier dernier.

Le 16 Mars. Le Secrétaire a préſenté de la part de la Société royale des Sciences de Göttingue: le VIIIe Tome des *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Göttingenſis.*

Le 23 Mars. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. le Prof. Bode de Berlin: *Aſtronomiſches Jahrbuch für das Jahr 1791, nebſt einer Sammlung der neueſten in der Aſtronomie einſchlagenden Abhandlungen.*

Le 30 Mars. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de S. E. Mr. le Grand-Chambellan, le Tome VII des Mémoires de Pierre le Grand. Voyez ci-deſſus au 12 Janvier.

Le

Digitized by Google

Le Secrétaire a préſenté de la part de la Société libre économique, le VII. Volume de ſes nouveaux mémoires: продолженïи трудовъ вольнаго экономическаго общества.

—— il a lu une rélation de la chaleur extraordinaire obſervée à Lisbonne dans la nuit du 9 au 10 Janvier nouveau ſtile. Cette rélation a été communiquée par S. E. Mr. le Chevalier d'Horta-Machado, Miniſtre de S. M. Très-fidèle à la Cour Impériale de Ruſſie.

Le 16 Avril. M. le Conſ. de Cour Lepechin a rapporté, avoir reçu pour le jardin botanique diverſes ſémences cueillies aux environs d'Ochotzk' & de Kolyma, que le Capitaine Billeng avoit envoyées à M. le Chevalier Pallas.

Le 23 Avril. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de l'Auteur: *Le Nuiton*, *Patriote. Discours prononcé par M. E. de Bavs*, *Avocat pour le Tiers-état du Baillage & de la ville de Nuits en Bourgogne.*

Le 30 Avril. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de S. E. M. de Schouvalof: le Tome VIII des Mémoires de Pierre le Grand. Voyez ci-deſſus au 12 Janvier.

Le 4 Mai. Le Secrétaire a lu une lettre fort intéreſſante de M. le Conſ. de Cour Laxmann, datée d'Irkoutzk' le 7 Mars, ſur les productions volcaniques qu'on trouve en Kamtſchatka & aux environs d'Ochotzk', dont il envoie quelques échantillons pour le cabinet académique.

Le 11 Mai. Le Secrétaire a lu une lettre de M. Tenon, Profeſſeur Royal de Pathologie à Paris, datée du 11 Septembre 1788, qui envoie ſes ouvrages: 1.) *Mémoires ſur les hôpitaux de Paris.* Volume in 4. & 2.) *Obſervations ſur les obſtacles qui s'oppoſent aux progrès de l'Anatomie.* Avec un mémoire

moire manuſcript, contenant des demandes relativement aux hôpitaux de malades, priant l'Académie de vouloir bien charger quelqu'un de ſes membres de mettre en marges les réponſes, ajoutant à ſa lettre encore quelques queſtions ſur lesquelles il ſouhaitoit d'être éclairci. L'Académie en le remerciant de ſon préſent, lui a fait répondre, que les renſeignemens qu'il demande n'étant pas du reſſort de Mrs. les Académiciens, elle le renvoyoit au Collège Impérial de Médecine.

Le 14 Mai. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Conſ. de Cour Laxmann, datée d'Irkutzk' le 21 Mars, qui communique en extrait les hauteurs extrèmes du Baromètre & du Thermomètre, qu'il a obſervées pendant l'hyver paſſé, & qui envoie pour le cabinet academique un morceau de lava du plus grand volcan de Kamtſchatka près du fleuve de ce nom.

Le 25 Mai. Le Secrétaire a lu une lettre de M. van Marum, Directeur du cabinet de Phyſique & du Muſeum de Teyler à Haarlem, datée du 5 de Mai, qui envoie une déſcription imprimée de frottoirs électriques d'une nouvelle conſtruction, dont l'effet ſurpaſſe de beaucoup celui des frottoirs ordinaires.

Le 8 Juin. M. le Conſ. de Cour Ozeretskofski a préſenté de la part de M. Kreſtinin, Correſpondant de l'Académie à Archangel: Приговоръ 7080 года Россїйскихъ Архїереевъ о бракахъ Государя Царя Іоанна Васильевича грознаго c. à d. Jugement des Archévêques Ruſſes ſur les mariages du Tſar Jean Vaſilievitſch en l'année 7080. Cette piece curieuſe fut inſérée dans le Journal académique ruſſe: Новыя ежемѣсячныя сочиненїя.

Le

Le 15 Juin. Le Secrétaire a lu une lettre de S. E. Mr. le Prince Demétrius de Gollitzin, Honoraire de l'Académie, datée de la Haye le 29 Janvier, qui envoie, de la part de l'Académie Impériale & Royale des Sciences & Belles-Letteres de Bruxelles, le V. Tome des Mémoires de cette Société, imprimés in 4., & de la part de l'éditeur: *Déſcription phyſique de la contrée de la Tauride, relativement aux trois regnes de la nature. Par M. le Conſeiller de Collèges Hablitzl*, traduite du Ruſſe & enrichie des notes du traducteur. 8. La lettre du Prince contient au reſte une notice d'une guériſon radicale de diſſentérie invétérée, opérée par l'application de l'air fixe; & une déſcription d'une belle pierre élaſtique de l'Amérique, qui ſe trouve dans le cabinet du Prince.

Le 19 Juin. Le Secrétaire a lu une lettre de M. de Grimaud Prof. Royal dans l'univerſité de Médecine de Montpellier, datée du 3 de Mai, qui s'annonce comme auteur du mémoire françois ſur la nutrition, auquel l'Académie a donné l'acceſſit.

Le 22 Juin. Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de M. le Baron de Hupſch à Cologne, deux exemplaires de ſa nouvelle découverte d'une *Méthode peu coûteuſe, efficace & aſſurée, de traiter tous les hommes décédés en apparence, pour les rappeller à la vie.* 8. imprimée en françois & en allemand.

M. le Conſeiller de Collèges Roumovski a communiqué & lu une lettre de M. Gerſtner, Prof. d'Aſtronomie à Prague en Bohème, datée du 24 Mars, qui envoie des corrections, qu'on doit appliquer aux obſervations d'Uranus, pour en déduire des élémens plus exacts de ſon orbite, entant qu'elle ſouffre des perturbations par l'action de Saturne & de Jupiter.

Digitized by Google

Le 25 Juin. Le Secrétaire a remis de la part de la Société Royale des Sciences de Londres: *Philoſophical Transactions of the Royal Society of London. Vol. LXXVIII. for the Year 1788. Part. II.*

Il a lu une lettre de M. de la Lande, datée de Paris le 8 Juin, qui communique quelques nouveautés aſtronomiques, & qui annonce des nouvelles tables de Jupiter & de Saturne, calculées par M. de Lambre, qui ſont beaucoup plus exactes que ne ſont celles, dont les Aſtronomes ſe ſont ſervis jusqu'ici.

Le 9 Juillet. M. l'Académicien Zouyef a préſenté de la part de l'auteur, M. le Conſ. de Cour Toumanski, Correſpondant de l'Académie: Собранїе разныхъ записокъ и сочиненїе о жизни и дѣянїяхъ Петра Великаго. c. à. d. Collection des divers écrits & mémoires ſur la vie & les exploits de Pierre le Grand.

Madame le Princeſſe de Daſchkaw a envoyé pour le médailler académique, de la part de M. de Kloppmann, Marechal de la Cour de S. A. S. Mſgr. le Duc de Courlande, une médaille que ce cavalier a fait frapper à la mémoire de la priſe d'Otſchakov, en honneur de S. A. Mſgr. le Feldmarechal Prince de Potemkin.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Conſeiller de Cour Laxmann, datée d'Irkutzk le 23 Mai, qui communique le projet d'un voyage minéralogique qu'il ſe propoſe de faire en déſcendant la Lena jusqu'à l'embouchure du Witim, & allant de là par terre le long de la rive du Wiluc aux montagnes ſalines & minérales de ces contrées. (*)

Le

(*) Des obſtacles imprévus l'ont obligé de remettre ce voyage au printemps prochain.

Digitized by Google

Le 9 Juillet. M. le Conſ. de Collèges Pallas a remis de la part de l'Académie des Sciences de Dublin: *The Transactions of the Irish Academy* 1787. Et de la part de l'auteur, M. le Conſ. du Collège-Supérieur des mines Ferber: *Drey Briefe mineralogiſchen Inhalts an den Freyherrn von Racknitz. Churfürſtl. Sächſiſchen Kammerherrn geſchrieben. u. ſ. w.*

Le 17 Août. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Comte Grégoire de Razoumovsky, datée de Lauſanne le 8 Avril, qui envoie à l'Académie ſon *Hiſtoire naturelle du Jorat & de ſes environs, & celle des trois lacs de Neufchatel, Morat & Bienne.* 2 volumes in 8. imprimés à Lauſanne.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé de la part de l'Univerſité Impériale de Moscou, le discours imprimé qui a été prononcé en latin au grand Auditoire, le 30 Juin, par M. le Prof. Bauſe, à l'occaſion de l'anniverſaire de l'avènement de Sa Majeſté l'Impératrice au throne de toutes les Ruſſies.

Le Secrétaire a préſenté la nouvelle édition des *Inſtitutiones calculi differentialis* par feu M. Euler ſon pere, augmentée d'un ſupplément ſur les fonctions inexplicables, qui vient de paroître à Pavie, ſous la direction de M. Grégoire Fontana, Prof. de Mathématique, & par les ſoins de M. Ferdinand Speroni, ſon élève.

Le 20 Août. Le Secrétaire a lu une lettre de M. George Vega, Capitaine & Prof. en Mathématiques au Corps Impérial des Bombardiers, datée de Vienne le 16 Juin, lequel envoie tous ſes ouvrages qui ſont:

Logarithmiſche, trigonometriſche und andere zum Gebrauch der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln. Wien 1783. 8.

Vor-

Vorleſungen über die Mathematik. Trois volumes in 8. Wien 1783. 84 & 88.

Practiſche Anweiſung zum Bombenwerfen, mittelſt dazu eingerichteter Hülfſstafel. Wien 1787. 8.

Berechnung der Länge des halben Umkreiſes auf 140 *Figuren*: en manuſcript, ainſi que quelques eſſais ſur la conſtruction des teleſcopes achromatiques à pluſieurs oculaires.

Le 24 Août. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Conſ. Privé Loeſch à Anſpach, datée du 24 Avril, qui envoie de la part du Collège Illuſtre de cette ville, divers programmes & panégyriques, que le dit Collège a publiés en 1788.

Le 27 Août. Mad. la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé, de la part de M. le Grand-Chambellan, le Xe volume des mémoires de Pierre le Grand : Дѣянїя Петра Великаго.

M. l'Académicien Zouyef a préſenté une nouvelle édition corrigée de ſon hiſtoire naturelle, publiée à l'uſage des écoles nationales. Начертанїе Естественной Исторїи ч. I и II.

Et de la part de M. le Conſ. de Cour Koch : *Tentamen ſecundum & quidem tentamen enucleationis Sphingium*, imprimé en latin & en ruſſe. 8.

Le 31 Août. Mad. la Princeſſe de Daſchkaw a envoyé pour la Bibliothéque académique : *Remarques hiſtoriques & Anecdotes ſur la Baſtille.*

Le 4 Septembre. Aſſemblée extraordinaire. Voyez ci-deſſus, pag. 4.

Le 7 Septembre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. Bode, datée de Berlin le 27 Août, qui communique quelques nouvelles aſtronomiques.

Le

Le 10 Septembre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. Hemmer, datée de Manheim le 26 Juin, qui envoie de la part de la Société-Electorale. *Ephemerides Societatis meteorologicae Palatinae. Obſervationes anni* 1787.

—— il a lu une lettre de M. de la Lande, datée de Paris le 26 Août, contenant des obſervations aſtronomiques, &

—— une lettre de M. le Conſ. de Cour Laxmann, datée d'Irkoutzk le 14 Juillet, qui envoie pour le cabinet académique quelques morceaux précieux du ſpathe bleu & roſe, du ſchörl verd & du zéolithe.

Le 17 Septembre. Le Secrétaire a préſenté, de la part de M. Martin Euler, le Proſpectus d'un Dictionnaire de Commerce, qui paroîtra ſous le titre: *Neues Handlungs-Lexicon in deutſchen, franzöſiſchen und italienſchen Rubriken, für junge Kaufleute und Komtoriſten.*

Le 21 Septembre. M. l'Académicien Zouyef a préſenté de la part de M. le Conſ. de Cour Ambodic, Docteur & Prof. en médecine, le 3ᵉ & 4ᵉ volume de ſa matière médicale, Врачебное Веществословіе.

Le 28 Septembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. le Conſ. de Cour Hermann: *Verſuch einer mineralogiſchen Beſchreibung des Uraliſchen Erzgebürges.* En deux volumes in 8, dédié à Sa Majeſté l'Impératrice.

Le 5 Octobre. M. l'Académicien Fuſs a lu une lettre de M. le Baron de Paccaſſi, Corréſpondant de l'Académie, datée de Vienne le 19 Septembre, qui envoie une conſtruction géométrique des angles d'un triangle ſphèrique.

Le 12 Octobre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le D. Kratzenſtein, datée de Copenhague le 26 Septembre, concernant la préparation de l'argent fulminant. M. Kratzenſtein communique ſes idées ſur le phénomène de ſa détonnation. Le reſte de la lettre roule ſur la perfection de ſa machine vocale, & ſur celles de l'Abbé Mical à Paris & du D. Müller à Vienne, qui doivent prononcer & chanter des phraſes entières.

Le 15 Octobre. M. le Conſ. de Cour Ozeretskovski a préſenté de la part de M. Kreſtinin, une hiſtoire de la ville de Kolmogor: Начертанïе Исторïи города Холмогоръ, avec une ancienne gravure très curieuſe & fort rare, contenant une diſtribution des impots ſur le nombre des charrues: Сошное писмо. Cette hiſtoire a été inſérée au Calendrier hiſtorique de 1790, & enſuite imprimée ſéparément.

Le 19 Octobre. Le Secrétaire a préſenté de la part de l'éditeur. *Proſpectus d'un Tableau de la Ruſſie, contenant ſa population, la conſtitution de ſon ſol, ſes produits naturels, ſon économie rurale, l'exploitation des mines, ſes manufactures, ſon commerce & ſes finances, par M. le Conſ. de Cour Hermann.* Propoſé par voie de ſouſcription par les libraires Chrétien Tornow & Comp.

Le 22 Octobre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Brigadier de Lorgna, adreſſée à feu M. Bernoulli & datée de Verone le 21 Avril. M. de Lorgna y communique ſes idées ſur les fonctions arbitraires, qui font le ſujet de la queſtion propoſée par l'Académie pour le Prix de 1790, & envoie les ouvrages ſuivans in 4.

Memorie di Matematica & Fiſica della Societa Italiana. Tomo IV. Verona 1788.

Mé-

Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Turin. Années 1786 & 1787, à Turin 1788.

Principi di Geografia Aſtronomico-Geometrica di Anton-Mario Lorgna. Verona 1789.

—— il a lu une lettre de S. E. Mr. le Prince Demétrius de Golitzin, datée d'Aſchaffenbourg le 19 Septembre, qui communique une lettre que lui à adreſſée M. le D. Jenſſens d'Oſterhout le 28 Avril, contenant un recit détaillé de la guériſon radicale d'une diſſenterie chronique par des clyſtères d'air fixe (voyez ci-deſſus au 15 Juin). La lettre du Prince contient encore d'autres emplois ſalutaires de l'air fixe dans des cas déſeſpérés, & ſurtout ſa propriété de diſſoudre la pierre.

Le 26 Octobre. M. le Profeſſeur Zouyef a préſenté de la part de M. le Conſ. de Cour Ambodic, l'ouvrage de cet habile médecin ſur l'art d'accoucher, diviſé en cinq parties: Искуство повивальное, или Наука о бабичьемъ дѣлѣ, на пять частей раздѣленная.

Le 2 Novembre. Le Secrétaire a lu une lettre antérieure de S. E. Mr. le Prince Demétrius de Golitzin, datée d'Aſchaffenbourg le 11 Août, qui envoie pluſieurs exemplaires de ſes *Lettres minéralogiques*, adreſſées à feu M. Camper, pour les diſtribuer à Mrs. les Académiciens.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw fit remettre de la part de M. le Grand-Chambellan de Schouvalof le XI[e] volume des Mémoires de Pierre le Grand, & de la part de l'Univerſité Impériale de Moscou: *Catalogus lectionum publicarum in Vniverſitate Caeſarea Mosquenſi, ad annum* 1789.

Le Secrétaire a communiqué de la part de M. le Conſ. Privé Formey, Directeur de la Claſſe de Philoſophie & Secré-

taire perpétuel de l'Académie royale des Sciences & Belles-Lettres de Pruſſe à Berlin, le Programme des Prix propoſés par cette Académie pour l'année 1791.

Le 5 Novembre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Conſ. de Cour Zimmermann à Brounswig, datée du 17 Septembre, qui envoie: *Voyage à la Nitriere naturelle qui ſe trouve à Molfetta dans la terre de Bari en Pouille*, imprimé à Paris; & quelques exemplaires d'une annonce des Annales géographiques & ſtatiſtiques, qu'il ſe propoſe de publier en trois langues, en françois, en anglois & en allemand.

Le 9 Novembre. M. le Prof. Géorgi a remis de la part de M. le Conſ. de Cour Tychſen, Profeſſeur à Roſtoc:

Olaï Gerardi Tychſen Vindicatio refutationis hiſpane ſcriptae ab anonymis hiſpani objectionibus. 8. (*)

—— Interpretatio inſcriptionis cuficae in marmorea templi patriarchalis S. Petri cathedra, qua S. Apoſtolus Petrus Antiochiae ſediſſe traditur. Editio II. 4.

—— Explicatio cuficae inſcriptionis quae in columna lapidea muſei Societatis antiquariorum Londinenſis conſpicitur. Adjecta eſt marmoris Meſſunenſis interpretatio 4.

Madame la Princeſſe de Daſchkaw a fait remettre une carte deſſinée du canal de Ladoga, avec les plans & les élévations de ce canal.

Le 12 Novembre. M. le Profeſſeur Zouyef a remis de la part de M. Kob, Docteur & Phyſicien à Roth, une lettre

(*) Cette brochure a déja été préſentée en 1787 le 19 Nov. Voyez les Nova Acta Tom. V. Hiſtoire pag. 29.

Digitized by Google

tre adreſſée à l'Académie de Vienne le 19 Octobre, avec un ouvrage imprimé, intitulé *D. Benjamin Franklins erweitertes Lehrgebäude der natürlichen Electricität für jedermann faſſlich und deutlich dargeſtellt.* 8.

Le 16 Novembre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. Saul Wahl, négociant à Pirmaſens près de Deux-Ponts, du 1 Novembre, qui annonce deux inventions nouvelles: la premiere d'éffacer toutes ſortes d'écritures, en ſorte qu'il n'y reſte que la ſignature, ou ce qu'on en voudra conſerver, de maniere qu'on puiſſe enſuite écrire à la place de ce qui a été effacé, tout ce qu'on voudroit. L'autre invention eſt une ſorte d'antidote de la premiere, & conſiſte dans la compoſition d'une encre, dont les traits ne peuvent être détruits par aucun remède, & avec laquelle on pourroit auſſi préſerver facilement les documens déja écrits, à fin qu'ils obtiennent la même bonne qualité de ne pouvoir plus être détruits & falſifiés.

Le 23 Novembre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. Bode, Academicien de Berlin, datée du 7 Novembre, qui envoie ſon obſervation du dernier paſſage de Mercure par le Soleil, & qui communique la nouvelle découverte que M. Herſchel a faite avec ſon telescope de quarante pieds, d'un ſixieme & ſeptieme ſatellite de Saturne.

Le 7 Décembre. Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Conſeiller Koelreuter, de Carlsruh le 17 Novembre, qui rapporte qu'on fait actuellement à Carlsruh un verre de Cryſtall, qui ne le céde en rien à celui de l'Angleterre: que quelques amateurs de Chymie eſſaient auſſi de faire du flintglaſs & qu'ils ont déja réuſſi a en fabriquer, dont la péſanteur ſpéci-

cifique eſt conſidérablement plus grande que celle du meilleur flintglaſs anglois. Enfin que comme tous ces eſſais ſe font aux dépens de Msgr. le Margrave, il n'eſt pas douteux, qu'on ne parviendra à le perfectionner encore d'avantage.

Le Secrétaire a préſenté les obſervations météralogiques, que M. le Conſ. de Cour & Chevalier Stritter a faites à Moscou, & qu'il continue de lui envoyer régulierement pour chaque mois de l'année.

PRÉCIS

Digitized by Google

PRÉCIS DE LA VIE DE MONSIEUR JACQUES BERNOULLI.

Jacques Bernoulli, Licencié en Droit, membre de la Société de Phyſique de Bâle & Correſpondant de la Société royale des Sciences de Turin, nâquit à Bâle en Suiſſe, le 17 Octobre 1759, de Jean Bernoulli, Docteur en Droit & Profeſſeur de Mathématique en l'Univerſité de cette ville, & de Suſanne Koenig.

Iſſu d'une famille illuſtrée par trois Géomètres du premier ordre & par quatre autres Mathématiciens d'une grande réputation (*), il ſe diſtingua de bonne heure par ſes talens &

(*) Nous ne croyons pas faire un hors-d'oeuvre déſagréable aux lecteurs de cette petite biographie, en y ajoutant, dans une note, une courte notice de tous les membres de cette famille unique, qui ſe ſont diſtingués comme Géomètres. En voici la liſte:

1°) *Jacques Bernoulli.* Profeſſeur des Mathématiques à Bâle, membre des Académies de Paris & de Berlin, né à Bâle le 27 Décembre 1654, mort *ibid.* le 16 Août 1705.

2°) *Jean Bernoulli*, frere du précédent. Profeſſeur de Mathématiques à Groeningue & enſuite à Bâle, membre des Académies de St. Pétersbourg, de Paris, & de Berlin, de la Société Royale de Londres, de l'Inſtitut de Bologne, &c. né à Bâle le 27 Juillet 1667, mort *ibidem* le 1 Janvier 1748.

Digitized by Google

& ſes diſpoſitions heureuſes, relevées par une aſſiduité peu commune & une grande application à l'étude.

Après avoir achevé ſes humanités, il fut envoyé à Neufchatel, pour y apprendre la langue françoiſe, comme c'eſt la coûtume à Bâle. De retour de cette ville il reçut le grade de maître-ès-arts & ſe fit inſcrire ſur la liſte des étudians en Droit, en fréquentant les leçons des Profeſſeurs en Droit de l'Univerſité avec tant de ſuccès, qu'il ſe vit déja en 1778 en état de ſoutenir publiquement des théſes ſur quelques points difficiles du Droit & de recevoir ſes licences.

En 1780 il fit, avec quelques amis, un tour par pluſieurs cantons de la Suiſſe. La déſcription de ce petit voyage, écrite ſans prétention & ſans nom d'auteur, ſe trouve dans le 3me volume du recueil de voyages, publié à Berlin par M. Jean Bernoulli.

Cependant l'étude du droit & l'application qu'il y mettoit, n'avoient pu étouffer l'eſprit géométrique, héreditaire dans la famille du jeune Juriſconſulte. Les leçons de Mathématiques que ſon pere lui avoit données dans ſa premiere jeuneſſe, & qui furent continuées dans la ſuite par ſon oncle, le

3°) *Nicolas Bernoulli.* Neveu des deux précèdens, Profeſſeur des Mathématiques à Padoue, enſuite Profeſſeur en Logique & enfin en Droit à Bâle, membre de l'Académie des Sciences & Belles lettres de Berlin, de la Société Royale de Londres & de l'Inſtitut de Bologne, né à Bâle le 10 Octobre 1687; mort dans la même ville le 29 Nov. 1759.

4°) *Nicolas Bernoulli*, fils de No. 2, Licencié en Droit, Profeſſeur en Droit à Berne & enſuite Profeſſeur des Mathématiques à St. Pétersbourg, membre de l'Inſtitut de Bologne; né à Bâle le 27 Janvier 1695, mort à St. Pétersbourg le 26 Juillet 1726.

Digitized by Google

le celèbre Daniel Bernoulli, avoient nourri ſon penchant inné & irréſiſtible pour les Sciences exactes. Ses progrès rapides firent concevoir de lui les plus belles eſpérances & inſpirerent aux chefs de l'Univerſité la confiance de le charger en 1780 des fonctions de ſon Oncle que les infirmités d'un âge fort avancé avoient mis, depuis quelque tems, hors d'état de continuer ſes leçons publiques de Phyſique expérimentale. M. Bernoulli remplit ces fonctions jusqu'à la mort de ſon Oncle, à la ſatisfaction de ſes auditeurs & de l'Univerſité; mais il n'eut pas celle de lui ſuccéder, quoiqu'il ſe fut mis ſur la liſte des concurrens pour cette chaire vacante, parceque le ſort qui eſt à Bâle le diſpenſateur des places académiques, auſſi bien que de toutes les autres charges de la République, lui avoit été contraire, caprice de la fortune qu'il avoit déjà éprouvé en 1780, lorsqu'il concourroit pour la chaire d'Eloquence qui vaquoit dans ce tems-là. C'eſt à cette derniere occaſion qu'il publia ſes théſes ſur le Sublime.

Ce double guignon, joint au vif deſir de voir le monde, ſi naturel & ſi puiſſant dans un jeune homme, lui fit pren-

5°) *Daniel Bernoulli*, frere du précédent, Docteur en Médecine, Profeſſeur des Mathématiques à St. Pétersbourg, enſuite Profeſſeur d'Anatomie & de Botanique à Bâle, enfin Profeſſeur de Phyſique en la même Univerſité; membre des Académies de St. Pétersbourg, de Paris & de Berlin, de la Société Royale de Londres, &c.; né à Groeningue le 29 Janvier 1700, mort à Bâle le 17 Mars 1782.

6°) *Jean Bernoulli*, frere des deux précédens, Docteur en droit, Profeſſeur d'Eloquence & après des Mathématiques à Bâle, membre des Académies de Paris & de Berlin; né à Bâle le 18 Mai 1710, mort dans la même ville le 17 Juillet 1790.

Digitized by Google

prendre peu de tems après une réſolution conforme à ſon goût décidé pour les voyages, mais qui paroiſſoit devoir le détourner, pour quelque tems, de la carrière littéraire, dans laquelle il avoit ſi bien débuté. Il accepta une place de Secrétaire auprès de M. le Comte de Breuner, Miniſtre de la Cour Impériale de Vienne auprès de la République de Veniſe.

Cette place lui fournit, á la vérité, l'occaſion déſirée de voyager & de voir ſucceſſivement une grande partie de l'Allemagne & de l'Italie; mais il ne pouvoit pas voyager continuellement, & arrivé à l'endroit de ſa déſtination l'ennui d'une carrière peu conforme à ſa façon de penſer & de ſentir, & défavorable à ſon goût pour l'étude, ne tarda pas à s'emparer de lui. La Société d'un petit nombre de gens de lettres charma cet ennui pour un tems, ſurtout celle de quelques Géomètres de réputation qu'il eut l'avantage de connoître en Italie, & qui lui firent un accueil proportionné au nom qu'il portoit & à ſon mérite perſonnel. L'amitié de ces Savans diſtingués, parmi leſquels ſe trouvoit auſſi le célèbre de Lorgna, répandit ſur ſon ſéjour en Italie des douceurs dont il

7°) *Jean Bernoulli*, fils du précédent, Licencié en Droit, Académicien de Berlin, Aſtronome Royal; membre des Académies de St. Pétersbourg, de Stokholm, Lion, Marſeille, de la Société Royale de Londres, de l'Inſtitut de Bologne, &c., né à Bâle le 4 Novembre 1744.

8°) *Jacques Bernoulli*, frere du précédent, Profeſſeur de Mathématiques à St. Pétersbourg, le même dont il eſt queſtion dans ce précis.

Cette notice eſt tirée en partie de deux ouvrages peu répandus: 1°) *Athenae Rauricae, ſive Catalogus Profeſſorum Academiae Baſilienſis.* Baſil. 1778. 2°) *Adumbratio Eruditorum Baſilienſium, meritis apud Exteros celebrium.* Ibid. 1780.

Digitized by Google

il conſerva toujours un ſouvenir reconnoiſſant; mais elle ne pouvoit pas étouffer le déſir de trouver bientôt une place, où il pût ſe vouer par état aux Sciences mathématiques & faire uſage des connoiſſances qu'il s'étoit acquiſes dans cette partie & dont il avoit déjà donné des preuves publiques dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences & Belles-lettres de Berlin & dans ceux de la Société Royale de Turin, qui le reçut au nombre de ces Membres correſpondans pendant ſon ſejour en cette derniere ville.

La diſpoſition d'eſprit dont nous venons de parler, étant parvenue, par le canal de M. Jean Bernoulli à Berlin, à la connoiſſance de ſon compatriote M. Fuſs, celui-ci ſaiſit une occaſion favorable pour en parler à Madame la Princeſſe de Daſchkaw, & S. E. déjà diſpoſée à reparer la perte que l'Académie venoit de faire par la mort de M. Lexell, trouva que M. Bernoulli, indépendamment de ſon mérite perſonnel, avoit des titres glorieux pour aſpirer à une place dans une Académie, à laquelle, dès ſa fondation, le grand pere & deux grands oncles de l'aſpirant avoient rendu des ſervices réels. M. Bernoulli reçut en conſéquence une vocation d'Adjoint, avec 600 Roubles d'appointement & la promeſſe d'être avancé dans l'eſpace d'un an. Il accepta ces offres avec joye & quitta Veniſe au mois de Mai 1786, prennant la route de la Suiſſe, pour revoir ſa patrie & ſa famille avant d'aller en Ruſſie, où il devoit ſe fixer, en vertu de ſon engagement, au moins pour trois ans.

À peine arrivé à St. Pétersbourg, ſon goût dominant pour les voyages, ou, ce qui chez lui revenoit au même, le le deſir de s'inſtruire, lui fit concevoir l'idée de participer au voyage de mer, qui avoit été projetté dans ce tems-là, &

 pour

pour l'exécution duquel on équippoit quelques vaiſſeaux qui devoient mêttre à la voile ſous les ordres de M. de Moulovsky. M. Bernoulli ſouhaita ardemment d'être de ce voyage en qualité d'Aſtronome, & s'aboucha, à cet effet, avec le chef déſigné de l'expédition, qui en reçut la propoſition avec plaiſir & ſe mit en devoir de regler & de faire ſanctionner les conditions dont ils étoient convenus, quand les amis de M. Bernoulli parvinrent, quoiqu'avec beaucoup de peine, à le faire renoncer á un voyage, aux fatigues duquel ſa conſtitution foible & délicate n'eut pas réſiſté.

Ayant abandonné ce projet qui lui avoit donné beaucoup de mouvement & d'inquiétude, il ſe jetta avec toute l'activité de ſon ame dans des recherches de Phyſico-Mathématique. Il travailla beaucoup & ſurpaſſa les eſpérances que l'Académie avoit conçues de lui, au point de ſe voir décoré du titre d'Académicien ordinaire avant l'echéance du terme fixé dans la vocation. Il préſenta & lût dans l'eſpace d'un peu plus de deux ans huit mémoires qui ſe trouvent dans les ſix premiers volumes des *Nova Acta*, & qui décèlent tous beaucoup de pénétration, un eſprit juſte & ſubtil, un jugement & des connoiſſances ſolides, & beaucoup plus d'adreſſe dans le maniement des formules analytiques qu'on n'auroit du attendre d'un Géomètre auſſi neuf en apparence dans les ſecrets de l'Analyſe & les reſſources du calcul.

En 1788 S. E. M. le Comte d'Anhalt reçut M. Bernoulli au nombre des Profeſſeurs du Corps Impérial des Cadets nobles de Terre, en le chargeant d'enſeigner l'Algèbre aux deux premières Claſſes des âges militaires. Il ſe diſtingua auſſi dans cette place par beaucoup de zèlé & d'attachement aux devoirs qu'elle lui impoſoit. Il s'étoit engagé, entre autres

autres, à faire, pour l'uſage du corps, un extrait de l'Algèbre de M. Euler, mais la mort l'enléva avant qu'il eut pu mettre la main à l'oeuvre.

En 1789 M. Bernoulli épouſa la fille cadette de M. Jean Albert Euler. Ce mariage qui promettoit au jeune couple une félicité durable, & qui uniſſoit deux noms également chers aux Sciences & reſpectables dans la république des lettres, fut diſſous deux mois après les noces, par la mort tragique du jeune époux qu'un coup d'Apoplexie enleva le 3 Juillet de la même année. Le ſéjour à la campagne & la facilité de ſe baigner tous les jours dans la Neva, lui avoit fait reprendre le goût & l'habitude de cet exercice ſi ſalutaire, mais, helas! ſi ſouvent funeſte. Il étoit bon nageur & par conſéquent ſans crainte d'accident ſiniſtre. Mais ſoit qu'il eût négligé cette fois de ſe mouiller la tête, ſoit qu'il ſe fut baigné trop tôt après le diner, pendant le travail de la digéſtion, qu'il n'avoit pas facile; ſoit enfin que le germe du mal fût déjà dans ſon corps, il perdit tout d'un coup mouvement & connoiſſance, ſans donner aucun ſigne de danger ou de détreſſe; & quoiqu'il fut retiré par ſon beaufrere presque au même inſtant, & quoiqu'on lui adminiſtrat tous les remèdes d'uſage, les ſecours de l'art furent inutiles, & les Médecins décidérent unanimement qu'il aïe été frappé d'un coup d'Apoplexie.

Nous avons déjà dit que M. Bernoulli étoit d'une conſtitution foible & delicate. En automne 1787 il fut attaqué d'une fievre nerveuſe qui le mit à deux doigts de la mort; il en revint pourtant, & il eſt à préſumer que ſa conſtitution ſe ſeroit fortifiée & qu'elle auroit pu réſiſter à la rigueur de notre climat, ſi la providence n'en eut diſpoſé au-

trement, en l'enlévant aux ſciences & à l'Académie dans la 29[me] année de ſon âge.

À un caractère franc, loyal & ſerviable M. Bernoulli joignoit beaucoup de modeſtie & de douceur, qualités qui lui attiroient l'amitié & l'eſtime de tous ceux qui l'ont connu, & qui juſtifient, autant que ſon ſavoir, les vifs regrêts que ſa mort prématurée à cauſés.

Sit illi terra levis!

* * *

Liſte des écrits de M. Bernoulli qui ont vu le jour.

Diſſertatio inauguralis juridica. Baſileae. 1778.

Theſes juridicae. ibid. 1779. (*)

Theſes de Sublimi. ibid. 1780.

Beſchreibung einer Luſtreiſe durch die Schweiz, im Auguſtmonat 1780 (in Joh. Bernoulli's Samml. kurzer Reiſebeſchr. III Band).

Lettre ſur l'élaſticité (Dans le Journal de Phyſique de l'Abbé Rozier ſuppl.)

Mémoire ſur la Théorie d'un Inſtrument qu'on pourroit nommer Machine balliſtique (Mem. de l'Acad. Royale des Sciences & Belles-lettres de Berlin, année 1781.)

Ge-

(*) Nous ignorons le titre complet de ces deux diſſertations.

Gedanken über die Frage: Warum wir bey unſern Wiederwärtigkeiten im Unglück Andrer Troſt finden? (Nützl. Beyträge zu den neuen Strelitziſchen Anzeigen. Jan. 1782).

Theſes phyſicae. Baſil. 1782.

Eſſai d'une nouvelle maniere d'envisager les différences, ou les fluxions des quantités variables (Mem. des Correſp. de l'Acad. Royale de Turin, année 1784 & 85. Tom. I. p. 2).

Bemerkungen auf einer Reiſe von Wien durch Steyermarck, Crain und Friaul. 1785 (Joh. Bernoulli's Samml. kurzer Reiſebeſchr. 16ter Band).

Conſidérations hydroſtatiques (Nova Acta Helvetica. T. I).

Analytiſche Auflöſung die an den Aeroſtaten anzubringenden Fallſchirme betreffend (Leipz. Magaz. für reine u. angew. Math. 1 St. 1786).

Sur le mouvement gyratoire d'un corps attaché à un fil extenſible. Premier Mémoire (Nova Acta Académ. Sc. Imp. Petrop. T. I. pro anno 1783).

Sur le mouvement gyratoire, &c. Second mémoire (Nova Acta T. II. 1784).

Sur le mouvement gyratoire &c. Troiſième mémoire (Nov. Act. T. III. 1785).

Dilucidationes in Commentarium III. Euleri de ictu glandium contra tabulam exploſarum (Nov. Act. T. IV. 1786).

Eſſai ſur une nouvelle machine hydraulique propre à élever de l'eau (Ibidem).

Eſſai

Digitized by Google

Eſſai théoretique ſur les vibrations des plaques élaſtiques rectangulaires & libres (Nov. Act. T. V. 1787).

De motu progreſſivo, rotatorio & oſcillatorio duorum corporum ope fili ſuper trochleam tranſeuntis connexorum (Nov. Act. T. VI. 1788).

De motu & reactione aquae per tubos mobiles transfluentis (Ibid.)

On a auſſi de M. Bernoulli une traduction allemande des Mémoires de Philoſophie de M. Mérian, en deux volumes.

Digitized by Google

EXTRAIT DES MÉMOIRES
CONTENUS DANS CE VOLUME.

Digitized by Google

CLASSE DE MATHÉMATIQUE.

I.

De formulis differentialibus, quae per duas pluresue quantitates datas multiplicatae fiant integrabiles.

Auctore *L. Eulero*, pag. 3.

Nous avons déjà eu l'occaſion de parler à différentes repriſes des recherches que feu M. Euler a faites ſur les courbes algébriques dont les arcs peuvent être exprimés par des formules intégrales données. Dans les extraits qui ſe trouvent à la tête du cinquième volume des Nouveaux Actes de l'Académie, nous avons fait mention de deux Mémoires, où cet illuſtre Géomètre a trouvé une infinité de courbes algébriques dont les arcs peuvent être méſurés par des arcs paraboliques ou elliptiques, & dans l'Hiſtoire de l'année ſuivante on trouve la notice d'un Mémoire, où cet Auteur cherchoit toutes les courbes dont les arcs ſont exprimés par la formule générale $\int \frac{v^{m-1}\partial v}{\sqrt{(1-v^{2n})}}$, & par cette autre beaucoup plus générale:

$$\int \frac{v^{m-1}\partial v}{\sqrt{(1-v^{2n})}}\,[a + b v^{2n} + c v^{4n} + d v^{6n} + \text{etc.}],$$

v étant une fonction des ordonnées, qu'il s'agit de déterminer, de manière que ces formules expriment l'arc de la courbe indéfini. Mais malgré tous ces heureux efforts de repandre du jour ſur cette nouvelle partie de l'Analyſe, il faut convenir

 qu'on

qu'on ignore encore jusqu'aux premiers principes l'art de réſoudre généralement ces ſortes de queſtions; & ce n'eſt qu'à force de multiplier de pareilles recherches qu'on peut eſperer d'approfondir cette matiere digne de l'attention de tous les Géomètres.

Le préſent Mémoire nous paroît fort propre à éclaircir en pluſieurs points cette nouvelle branche de calcul, que M. Euler a été le premier, & presque le ſeul, à traiter ſous le nom d'Analyſe indéterminée des Infinis: il eſt une ſuite des recherches antérieures de l'Auteur ſur le même ſujet. Car comme le Problème général de trouver des courbes algébriques dont l'élément indéfini puiſſe être exprimé par une formule différentielle préſcrite ∂s, ſe reduit à trouver un angle Φ tel que les formules ∂s ſin. Φ & ∂s coſ. Φ deviennent intégrables, & que cette queſtion ne peut même être tentée en général; M. Euler traite ici le Problème inverſe, en cherchant toutes les formules différentielles ∂W qui, multipliées par deux quantités propoſées quelconques, deviennent intégrables.

Après avoir réſolu ce Problème en général, & de deux manières différentes, l'Auteur fait l'application de ſes formules générales à quelques cas particuliers qui ſont d'un grand uſage dans les recherches ſur la nature des lignes courbes, relativement à leur rectification.

M. Euler termine ſon Mémoire par la réſolution d'un Problème encore plus général, dans lequel il cherche une formule différentielle telle que ſi on la multiplie par trois quantités variables propoſées, chaque produit ſe prête à l'intégration.

II.

II.
Quatuor Theoremata maxime notatu digna in Calculo integrali.

Auctore *L. Eulero*, pag. 22.

Le Sujet de ce Mémoire eſt encore, comme celui du Mémoire précédent, une ſuite des recherches multipliées de l'Auteur ſur les courbes algébriques, dont les arcs indéfinis s ſont exprimés par une même formule intégrale, ſavoir $s = \int \partial \Phi \, \text{ſin.} \, \Phi^{n-1}$. Car comme les ordonnées d'une courbe quelconque, qui répondent à cet arc indéfini s, ſont

$$x = \int \partial s \, \text{coſ.} \, \omega \quad \& \quad y = \int \partial s \, \text{ſin.} \, \omega,$$

ω étant l'angle de courbure: tout revient à trouver pour cet angle ω une valeur telle que x & y puiſſent être exprimés algébriquement. Or M. Euler a trouvé que la valeur $\omega = (n + 2i + 1)\Phi$ ſatisfait à cette condition, où n déſigne un nombre quelconque, entier ou fractionnaire, poſitif ou négatif, & i un nombre entier poſitif quelconque; propriété qui eſt démontrée dans le premier & le ſecond Théorème, où l'Auteur donne pour $\int \partial s \, \text{ſin.} \, \omega$ & pour $\int \partial s \, \text{coſ.} \, \omega$ les Intégrales algébriques compoſées la premiere des ſinus, l'autre des coſinus d'angles qui forment une progreſſion arithmétique décroiſſante dont le premier terme eſt $(n + 2i)\Phi$, le dernier $n\Phi$ & la différence 2Φ. La démonſtration de ces deux premiers Théorèmes eſt fondée ſur une réduction générale tirée de la différentielle des deux formules $\text{ſin.} \, \Phi^n \, \text{ſin.} \, \lambda\Phi$ & $\text{ſin.} \, \Phi^n \, \text{coſ.} \, \lambda\Phi$.

C'eſt par des expreſſions ſemblables & démontrées de la même manière que dans les deux derniers Théorèmes M. Euler préſente les intégrales des mêmes formules $\int \partial s \, \text{coſ.} \, \omega$ & $\int \partial s \, \text{ſin.} \, \omega$, ∂s étant $= \partial \Phi \, \text{coſ.} \, \Phi^{n-1}$, de ſorte que ces

Digitized by Google

deux Théorèmes combinés peuvent ſervir à trouver une infinité de courbes algébriques dont les arcs indéfinis ſont exprimés par la même formule intégrale $\int \partial \Phi \operatorname{coſ.} \Phi^{n-1}$, les deux premiers Théorèmes ayant fourni une infinité de courbes algébriques, dont les arcs indéfinis ſont $= \int \partial \Phi \operatorname{ſin.} \Phi^{n-1}$.

Finalement tous les quatre Théorèmes combinés frayent le chemin à la ſolution du Problème de trouver une infinité de courbes algébriques dont les arcs indéfinis ſont exprimés plus généralement par la forme

$$\int \partial \Phi \sqrt{(a a \operatorname{ſin.} \Phi^{2n-2} + b b \operatorname{coſ.} \Phi^{2n-2})}$$

problème dont la ſolution termine ce mémoire.

Nous ne pouvons pas paſſer ſous ſilence une choſe digne d'être relevée, c'eſt que M. Euler a réſolu au §. 20., pour ainſi dire en paſſant, un Problème qui l'avoit beaucoup occupé autrefois & dont il avoit déſeſpéré plus d'une fois de trouver la ſolution.

III.

De termino generali ſerierum hypergeometricarum.

Auctore *L. Eulero*, pag. 42.

Quand on conſidère la ſérie hypergeométrique ſous ſa forme la plus générale, c'eſt-à-dire celle dont les termes ſont :

Le $1^r = a$,
— $2^d = a(a+b)$,
— $3^e = a(a+b)(a+2b)$,
— $4^e = a(a+b)(a+2b)(a+3b)$,

&

& en général

Le $n^{me} = a(a+b)(a+2b)(a+3b)\ldots\ldots[a+(n-1)b]$ il ſe préſente une queſtion difficile autant que curieuſe ſur la valeur du terme n^{me}, lorsque n eſt un nombre fractionnaire, queſtion dont M. Euler avoit déja donné une ſolution dans ſon Calcul Differentiel, pag. 832, où il a trouvé, par la voye des interpolations, l'expreſſion ſuivante pour le terme n^{me} de la ſérie mentionnée :

$$a^n \cdot \frac{a^{1-n}(a+b)^n}{a+nb} \cdot \frac{(a+b)^{1-n}(a+2b)^n}{a+(n+1)b} \cdot \frac{(a+2b)^{1-n}(a+3b)^n}{a+(n+2)b} \cdot \text{etc.}$$

Mais comme la méthode, par laquelle il avoit été conduit à cette expreſſion, ne lui a paru ni préſentée d'une maniere aſſez lumineuſe, ni fondée, comme cela devroit être, ſur la nature même de ces ſeries, il a tâché de ſuppléer à ce double défaut dans le préſent mémoire.

La méthode que l'Auteur employe ici eſt fondée ſur la conſidération du terme i^{me} de la ſérie hypergéométrique en queſtion, i étant un nombre infiniment grand. Car en partant du terme n^{me}, on peut former facilément les termes de l'ordre $n+1$, $n+2$, $n+3$, & en général de l'ordre $n+i$, exprimés par le terme n^{me}; & en partant du terme i^{me}, on peut former ſucceſſivement les termes $i+1$, $i+2$, $i+3$, & en général $i+n$; deſorte que pour cet ordre $i+n$ on obtient deux expreſſions qui, comparées entr'elles, fourniſſent pour le terme n^{me} en queſtion un produit d'une infinité de facteurs dont la loi de progreſſion eſt évidente, & dans lequel on peut donner à la lettre n telle valeur qu'on veut, parceque dans toute l'opération il n'y a rien qui doive exclure les fractions, ni même les valeurs irrationnelles, comme l'Auteur fait voir par pluſieurs exemples.

IV.

Digitized by Google

IV.

De iterata integratione formularum integralium, dum aliquis exponens pro variabili aſſumitur.

Auctore *L. Eulero*, pag. 64.

Pour mieux ſaiſir l'idée de l'Auteur, le but de ce Mémoire, & la méthode d'intégrer qui y eſt développée, il ſuffira de ſuivre M. Euler dans la ſolution du premier Problème, où il traite la formule la plus ſimple $\int x^{\theta-1}\partial x$, dont la valeur priſe depuis le terme $x = 0$ jusqu'au terme $x = 1$, eſt $\frac{1}{\theta}$, de ſorte que $\int x^{\theta-1}\partial x = \frac{1}{\theta}$. Pour la nouvelle intégration de cette formule on ſuppoſe l'expoſant θ variable, & après avoir multiplié par $\partial\theta$ on prend de part & d'autre l'integrale de maniere qu'elle évanouiſſe en mettant $\theta = \alpha$. De cette maniere on a $\int\frac{\partial x}{x}\int\partial\theta\, x^{\theta} = \int\frac{\partial\theta}{\theta}$. Mais à cauſe de $\frac{\partial x}{x}$ conſtant & $\int\partial\theta\, x^{\theta} = \frac{x^{\theta}-x^{\alpha}}{l\,x}$, on aura

$$\int\frac{\partial x}{x}\cdot\frac{x^{\theta}-x^{\alpha}}{l\,x} = l\frac{\theta}{\alpha}.$$

D'une manière ſemblable M. Euler traite pluſieurs autres formules plus compliquées dont les Intégrales ſont connues pour certains termes d'intégration déterminés.

V.

Methodus facilis inveſtigandi radium oſculi, ex principio Maximorum et Minimorum petita.

Auctore *L. Eulero*, pag. 83.

Si d'un point quelconque Y d'une ligne courbe on tire la Normale, on ſait que chaque point O de cette Normale a

la

Digitized by Google

la propriété que ſa diſtance au point Y ne diffère point de ſa diſtance à un autre point infiniment proche de Y, c'eſt-à-dire que cette diſtance reſte la même, quoiqu'on faſſe varier le point Y d'une quantité infiniment-petite. Mais ſi ce point O eſt le centre du cercle oſculateur, l'intervalle O Y, ou le rayon oſculateur, reſte non ſeulement invariable pour les premieres différentielles, mais il ne changera non plus pour les différentielles ſecondes; d'où il ſuit que tant la premiere que la ſeconde différentielle de l'expreſſion de l'intervalle O Y, ou de ſon quarré, doit devenir zéro, ce qui fournit deux équations, deſquelles on déduit ſans difficulté l'expreſſion connue pour le rayon oſculateur, ſçavoir $\pm \frac{\partial x (1 + pp)^{\frac{3}{2}}}{\partial p}$, ou bien $\frac{\partial x}{\partial t}$, où x eſt l'abſciſſe & t le ſinus de l'angle de courbure. L'Auteur termine ce petit mémoire, en déduiſant de cette formule pluſieurs autres, dans la formation deſquelles la différentielle ou de l'abſciſſe, ou de l'ordonnée, ou de l'arc a été ſuppoſée conſtante.

VI.

Obſervationes generales circa ſeries, quarum termini ſecundum ſinus vel coſinus angulorum multiplorum progrediuntur.

Auctore *L. Eulero*, pag. 87.

Comme la ſomme de la ſérie $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 +$ &c. eſt néceſſairement une fonction de x, en déſignant cette fonction par le caractère $\Delta : x$, & mettant à la place de x les valeurs

$$p = \text{coſ.}\, \Phi + \sqrt{-1}\, \text{ſin.}\, \Phi,$$
$$q = \text{coſ.}\, \Phi - \sqrt{-1}\, \text{ſin.}\, \Phi,$$

 on

on obtient deux ſéries dont la ſomme & la différence fourniſſent deux autres, la premiere compoſée des coſinus & la ſeconde des ſinus des angles Φ, 2Φ, 3Φ, 4Φ, &c.; & la ſomme de ces deux ſéries ſera connue, toutes les fois que les coéfficiens A, B, C, D, &c. ſont tels que la ſomme de la ſérie $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.$, c'eſt-à-dire la fonction $\Delta : x$ eſt connue. M. Euler fait dans le Mémoire préſent, l'application de cette obſervation générale au cas où les coéfficiens A, B, C, D, &c. ſont ceux du binome élevé à la puiſſance indéfinie n, pour lesquels il a introduit les caractères $\left[{n \atop 0}\right]$, $\left[{n \atop 1}\right]$, $\left[{n \atop 2}\right]$, $\left[{n \atop 3}\right]$, &c. & il trouve les ſommations

$$\left[{n \atop 0}\right] + \left[{n \atop 1}\right] \text{coſ.}\, \Phi + \left[{n \atop 2}\right] \text{coſ.}\, 2\Phi + \&c. = 2^n \,\text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\Phi^n \,\text{coſ.}\, \tfrac{1}{2} n\Phi,$$

$$\left[{n \atop 1}\right] \text{ſin.}\, \Phi + \left[{n \atop 2}\right] \text{ſin.}\, 2\Phi + \left[{n \atop 3}\right] \text{ſin.}\, 3\Phi + \&c. = 2^n \,\text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\Phi^n \,\text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} n\Phi,$$

dont il met la vérité en évidence par des applications nombreuſes, tant pour des valeurs entières & poſitives que pour des valeurs négatives & fractionnaires de l'expoſant n, & pour différentes valeurs de l'angle Φ.

VII.

De integrationibus maxime memorabilibus ex Calculo Imaginariorum oriundis.

Auctore *L. Eulero*, pag. *99*.

En conſidérant une formule différentielle repréſentée ſous la forme générale $Z\,\partial z$, où Z marque une fonction quelconque de la variable z, telle cependant que l'Intégrale $\int Z\,\partial z$ puiſſe être aſſignée au moins par des logarithmes & des arcs de cercle, on aura $\int Z\,\partial z = \Delta : z$, où Δ déſigne une certaine fonction de z. Que ſi maintenant on donne à z une valeur imaginaire $x + y\sqrt{-1}$, la fonction Z pourra être repréſentée ſous la forme $M + N\sqrt{-1}$ & l'intégrale $\Delta : z$ ſe lais-

laiſſera toujours réduire à la forme $P + Q\sqrt{-1}$. Tout revient donc à déterminer les quantités

$$P = \int (M \partial x - N \partial y)$$
$$Q = \int (N \partial x + M \partial y)$$

ce qu'on pourra effectuer toutes les fois que la forme $\int Z \partial z$ ſera intégrable pour une valeur réelle de z, quelque compliquée que ſoit d'ailleurs cette Intégrale.

C'eſt d'après cette obſervation générale que M. Euler s'eſt conduit dans la recherche des Intégrales des formules

$$z^n \partial z, \quad \frac{\partial z}{1 + zz}, \quad \frac{\partial z}{1 + z^3} \quad \& \quad \frac{z^{m-1} \partial z}{1 + z^n},$$

pour le cas où $z = x + y\sqrt{-1}$, ou bien, en mettant

$$x = v \operatorname{coſ.} \Phi \quad \& \quad y = v \operatorname{ſin.} \Phi,$$

pour la valeur

$$z = v(\operatorname{coſ.} \Phi + \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} \Phi).$$

L'intégration des trois premieres formules n'eſt pas, à dire la verité, ſujette à beaucoup de difficultés, mais la dernière, qui eſt fondée ſur la décompoſition en fractions partielles, en préſente de plus d'une eſpèce, qu'il eſt intéreſſant de voir s'évanouir en partie & céder aux efforts du plus grand Analyſte.

Dans un Supplément M. Euler continue ces recherches, en appliquant ſa méthode, un peu ſimplifiée, à la formule $\int \frac{z^{m-1} \partial z}{1 - z^n}$, pour l'intégration de laquelle il donne deux méthodes différentes, dont la dernière cependant, a, de ſon propre aveu, le défaut d'être fondée ſur une ſimple conjecture, qu'il eſt difficile de mettre en évidence, mais qui neanmoins conduit à un réſultat parfaitement conforme tant à la

Digitized by Google

ſolution générale rigoureuſement démontrée, qu'aux cas particuliers qui en dérivent. Cet accord, qui ne ſçauroit être l'effet d'un pur hazard, engage l'Auteur à recommander ſa derniere ſolution à l'attention des Géomètres, en les invitant à l'établir ſur des principes ſûrs & inexpuguables.

VIII.
De projectione Sphaeroidis Ellipticae geographica. Diſſertatio Tertia.

Auctore *F. T. Schubert*, pag. 149.

Lorsque la ſurface de la terre que doit repréſenter une Carte géographique, n'eſt pas grande, on peut la regarder comme la ſurface d'un *cône*, laquelle développée dans un plan devient une projection géographique aſſés ſemblable à la portion ſphèrique qu'elle repréſente. De cette maniere l'on peut décrire une zône entiere qui ne s'étend pas trop en latitude. Pour celà il faut connoître l'axe du cône, ou le point d'interſection de l'axe de la terre & du cône, auſſi bien que le rapport entre les degrés de longitude & de latitude dans le Sphéroïde: le mémoire en contient les formules. L'auteur propoſe enſuite les règles que l'on doit ſuivre, pour repréſenter *l'aire* d'une ſurface quelconque, dans le même rapport qui a lieu dans le Sphèroïde elliptique. Les projections des Méridiens & des Parallèles ſont des lignes droites qui s'entrecoupent perpendiculairement; mais l'expreſſion des arcs de latitude, qui pour la Sphère eſt extrèmement ſimple, devient ici plus compliquée, étant compoſée de quantités circulaires & logarithmiques. Enfin il eſt montré, comment on peut appliquer au Sphéroïde la projection imaginée par *de l'Iſle*, pourque les *diſtances* des lieux ſoient repréſentées dans leur juſte pro-

Digitized by Google

proportion. Les Méridiens ſont des lignes droites qui ſe rencontrent toutes dans un point, ſitué 3° au delà du Pole, lequel point eſt le centre commun de tous les cercles des Parallèles.

L'auteur y a joint une table qu'il a calculé d'après le rapport des axes 230 : 229 & 200 : 199. Elle contient tous les nombres, dont on a beſoin dans une projection géographique, en voulant y tenir compte de la figure elliptique de la terre.

IX.

Obſervationes variae circa integrationem aequationum homogenearum rationalium, ſine variabilium ſeparatione perficiendam.

Auctore *Nicolao Fuſs*, pag. 162.

En comparant la méthode de trouver l'intégrale des équations homogènes rationelles, donnée autrefois dans les Commentaires de notre Académie, par Jean Bernoulli, avec la méthode poſtérieure de M. Euler, on s'apperçoit aiſément de la liaiſon qui ſubſiſte entre ces deux méthodes, dont l'une n'eſt que l'inverſe de l'autre. Mais il eſt plus difficile de voir comment ces règles dérivent de la règle générale que M. Euler a donnée dans ſon Calcul intégral pour l'intégration des équations homogènes en général. M. Fuſs examine ici cette règle générale & fait voir de quelle maniere elle conduit à la règle connue pour les équations homogènes rationelles.

X.

Enodatio difficultatis ab Ill. Eulero in diſſertatione: *De integrationibus memorabilibus ex calculo Imaginariorum oriundis*, Geométris propoſitae.

Auctore *Nicolao Fuſs*, pag. 175.

La difficulté propoſée par feu M. Euler, ſur laquelle roule le préſent Mémoire, eſt la même dont il a été fait mention à la fin de l'extrait du VII. Mémoire de ce Volume. M. Fuſs montre d'où vient l'accord qui ſubſiſte entre les deux méthodes employées par M. Euler pour trouver l'Intégrale de la formule $\int \frac{z^{m-1}\,\partial z}{1 - z^n}$, z étant une quantité imaginaire; & il donne une méthode directe & générale, de trouver tant cette Intégrale que $\int \frac{z^{m-1}\,\partial z}{1 + z^n}$, établie ſur des principes ſûrs & inconteſtables, mais ſemblable au reſte à celle que M. Euler avoit fondée ſur une ſimple conjecture. Cette méthode remarquable par ſa ſimplicité, n'eſt pas ſuſceptible d'extrait.

CLAS-

Digitized by Google

CLASSE DE PHYSICO-MATHÉMATIQUE.

I.

De momentis virium reſpectu axis cuiuscunque inveniendis; vbi plurima inſignia ſymptomata circa binas rectas non in eodem plano ſitas, explicantur.

Auctore *L. Eulero*, pag. 191.

Quand on cherche le moment d'une force quelconque qui agit dans la direction d'une certaine ligne droite que nous nommerons la directrice, & par rapport à un axe quelconque, la règle eſt, comme on ſçait, de multiplier la force par la perpendiculaire abaiſſée d'un point arbitraire de la directrice ſur l'axe, & par le ſinus de l'inclinaiſon de la directrice avec le plan paſſant par l'axe & par la perpendiculaire. Cette règle eſt ſimple dans ſon énoncé; mais quand on veut en faire l'application & déterminer, par le calcul, la perpendiculaire & l'inclinaiſon, qui entrent dans cette expreſſion du moment, on parvient à des formules inextricables.

Pour éviter ce grand inconvénient M. Euler obſerve ici que, le choix du point de la directrice, d'où l'on abaiſſe la perpendiculaire ſur l'axe, étant arbitraire, on pourra le choiſir de maniere que la perpendiculaire devienne la plus petite poſſible, moyennant quoi la détermination de la perpendiculaire en queſtion, c'eſt-à-dire de la plus petite diſtance entre la directrice & l'axe, & de l'inclinaiſon de la directrice, de-

devient très facile & l'expreſſion du moment de force cherché aſſez ſimple, ce que l'Auteur fait voir par un procédé très méthodique.

L'expreſſion que M. Euler a trouvée pour le moment cherché, le met en état de réſoudre un autre Problème de Mécanique très-difficile en apparence, ſavoir: Connoiſſant les trois momens qu'une force qui agit dans une direction donnée exerce ſur trois axes fixes perpendiculaires entr'eux & paſſans par un même point *a*; trouver le moment que la même force produira ſur un quatrième axe quelconque paſſant par le même point *a*. Le mémoire eſt terminé par une Théorème intereſſant dont voici l'énoncé: Quelles que ſoyent les forces qui agiſſent ſur un corps mobile autour d'un axe *a z*, ſi les momens par rapport à trois axes fixes perpendiculaires entr'eux *a f*, *a g*, *a h*, ſont $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, le moment par rapport à l'axe *a z* ſera $f\mathfrak{P} + g\mathfrak{Q} + h\mathfrak{R}$, où *f*, *g*, *h*, déſignent les coſinus des inclinaiſons de l'axe *a z* avec les trois axes fixes.

II.

Methodus facilis omnium virium momenta reſpectu axis cuiuscunque determinandi.

Auctore *L. Eulero*, pag. 205.

Comme le Théorème, par lequel M. Euler a terminé ſon Mémoire précédent, a été déduit de quelques conſidérations purement géométriques, ſon intention eſt de le faire découler, dans le préſent Mémoire, des principes ſtatiques, ce qu'il effectue avec ſon adreſſe connue & tant admirée, mais par une ſuite de raiſonnemens & de calculs, où il nous eſt impoſſible de le ſuivre ſans figures, c'eſt pourquoi nous renvoyons le Lecteur au Mémoire même.

III.

III.

Analyſe des expériences faites en Ruſſie ſur la longueur du Pendule à ſecondes, ou le rapport de la péſanteur, en différentes latitudes.

Par M. *Krafft*, pag. 215.

Les expériences ſur la longueur du Pendule à ſecondes en différentes latitudes, ont été la premiere ſource de toute la théorie de la vraie figure de la Terre; elles fourniſſent encore un des moyens principaux pour déterminer avec préciſion la véritable quantité de ſon applatiſſement. En les faiſant donc avec exactitude & en autant d'endroits que poſſible, ces ſortes d'expériences ne laiſſent pas d'être d'un grand intérèt pour ce point important de l'Aſtronomie phyſique, & il s'en faut beaucoup, qu'on en ait déja un auſſi grand nombre qu'on pourroit déſirer pour cet effet. De ſemblables expériences ont été auſſi faites, par le ſoin de l'Académie, il y a long-temps, & en pluſieurs endroits de la Ruſſie, mais elles ſe trouvent éparſes dans pluſieurs volumes de ſes Mémoires; M. Krafft ſe propoſe donc dans celui-ci de les rédiger, de les préſenter dans leur rapprochement, & d'en faire le calcul, afin d'en tirer les conſéquences qu'elles ſont capables de fournir.

L'Auteur trouve d'abord, que, d'après ces expériences, la longueur du Pendule à ſecondes x ſous une latitude quelconque λ & à 10° du Thermomètre de Réaumur, eſt déterminée par l'équation ſuivante

$$x = [439,178 + 2,321.\ \text{ſin.}\ \lambda^2]$$ lignes du Pied. françois.

Cette expreſſion s'accorde jusqu'à quelques centiemes de ligne près, non ſeulement avec toutes les expériences du Pendule faites en Ruſſie; elle repréſente avec la même préciſion auſſi

la longueur du Pendule obſervée par Mr. Lyons, ſous la latitude boréale de 79°. 50′, la plus forte, où l'on ait jamais fait de pareilles expériences. Cette équation donne enſuite à connoitre l'augmentation de la péſanteur depuis l'Equateur jusqu'au Parallele de la même latitude λ; & faiſant la péſanteur équatorienne $= g$, la péſanteur polaire $= G$ & deſignant par y celle qui a lieu ſous la latitude λ, l'Auteur trouve

$$y = [1 + 0,0052848.\ \text{ſin.}\ \lambda^2].g$$

& par conſéquent $G = 1,0052848.g$. Moyennant ce rapport de la péſanteur en différentes latitudes, & en partant de la ſuppoſition, que la Terre eſt une Ellipſoide homogène de revolution, il trouve l'applatiſſement $= \frac{1}{190}$, au lieu de $\frac{1}{230}$, qu'il devoit être néceſſairement dans hypothéſe de la Terre elliptique homogène, de façon que pour concilier les expériences avec la Théorie, il faut renoncer ou à la figure elliptique de la Terre ou bien à la ſuppoſition de la denſité uniforme de ſes couches intérieures. L'Auteur examine ensuite les mêmes expériences dans l'hypothèſe de la Terre elliptique hetérogéne & en y appliquant deux Théoremes, dont l'un eſt de M. Clairaut & l'autre de M. de la Place, il en trouve l'applatiſſement abſolument tel, qu'il reſulte de la méſure des degrés terreſtres, ſçavoir $= \frac{1}{297}$, de façon, que ces expériences faites en Ruſſie démontrent également la remarque faite par M. de la Lande, que, quand on renonce à l'homogéneité de la Terre, la Théorie, les expériences du Pendule & la méſure des degrés terreſtres, entre les réſultats desquelles on a toujours trouvé des ſenſibles différences, s'accordent à indiquer pour la Terre le même applatiſſement.

IV.

Digitized by Google

IV.

De motu coni duplicis in altum ſponte aſcendentis.

Auctore *A. Kononoff*, pag. 229.

Feu M. George Wolffgang Krafft a déja traité ce ſujet avec beaucoup de ſagacité dans le ſixieme Tome des nouveaux Commentaires de l'Académie Impériale des Sciences, mais ſans entrer ſuffiſament dans le détail des forces qui effectuent le mouvement dont il eſt queſtion dans ce mémoire, il s'eſt arrété principalement à expliquer la cauſe pourquoi un corps compoſé de deux cones droits joints par leur baſe, monte ou ſe meut vers la partie la plus élévée des deux plans inclinés & divergeans, ſur lesquels on le poſe, en faiſant voir que ſon mouvement en haut n'eſt qu'apparent, & que véritablement le centre de gravité du corps descend, tandis que ſes extremités prennent un mouvement en haut. M. Kononoff a donc cru, qu'il ne ſeroit pas ſuperflu de reprendre ces recherches en déterminant par les principes de Méchanique & avec une exactitude plus ſcrupuleuſe ces forces mêmes ainſi que leurs effets, quelque angle que faſſent enſemble les deux plans inclinés. Il en fait enſuite l'application aux mouvemens des corps compoſés de deux cones tronqués, de même de ceux où les deux cones, dont ils ſont compoſés, ſe touchent par leurs pointes.

Digitized by Google

CLASSE DE PHYSIQUE.

I.

Planta noui generis alpina, Parnaſſiae affinis.

Auctore *E. Laxmann*, pag. 241.

M. Laxmann en parcourant les ſommets des plus hautes montagnes de la Sibérie dans le deſſein de découvrir & de décrire les minéraux qui s'y trouvent, y a cueilli une plante nouvelle qu'il a cru devoir faire connoître aux amateurs de la Botanique, en en donnant une déſcription exacte. Cette plante quant à l'extérieur paroit approcher le plus à la Parnaſſie marécageuſe, à l'exception que toutes les parties y ſont en proportion plus petites que dans celle-ci. Cependant le calice à cinq petales, ſans être diviſé en cinq parties, & le nectaire fendu en trois, prouvent ſuffiſament qu'il y a une différence ſenſible entre ces deux plantes.

II.

Commentatio nouae nomenclaturae chemicae condendae neceſſitatem et leges luſtrans.

Auctore *Laurentio Crellio*, pag. 243.

Vû la grande influence que la nomenclature en général a ſur les progrés de l'étude des ſciences phyſiques & chymiques, l'auteur célébre de la diſſertation y diſcute principalement trois objets. 1.) Si la chymie pouvoit ſe flatter d'avoir

Digitized by Google

voir déja une langue plus parfaite & aſſez fixe ? 2.) Quand elle ne l'a pas, ſi la langue que nous avons, ait beſoin d'être changée ou non ? Et enfin 3.) quelles ſont les regles, qu'on doit ſuivre dans ſon changement ? C'eſt ainſi que pour exprimer des choſes nouvelles, il eſt juſte, qu'on doit créer de nouveaux mots, & que la langue des anciens étant très vague & n'exprimant pas les objets ſi clairement & ſi poſitivement qu'il ſeroit à ſouhaiter pour les progrès de la ſcience, il eſt juſte encore qu'elle doit ſubir un changement quand on peut lui ſubſtituer une langue nouvelle, qui aura plus de juſteſſe & plus de poſitif. Mais toute la ſuite de ces argumens & le *pour* & le *contre* des deux opinions oppoſées ne peuvent être l'objet d'un extrait; pour les bien concevoir, il faudra lire la belle diſſertation même de l'auteur célébre.

III.

Obſervations minéralogiques ſur quelques montagnes volcaniques des environs de Göttingue.

Par M. *Baſile Sewerguine*, pag. 265.

Cette diſſertation ayant été lue bientôt après l'arrivée de la nouvelle de la mort de M. Ferber, l'auteur y fait tout au commencement l'éloge de ce minéralogiſte célébre. Puis il raconte les obſervations qu'il a faites ſur les montagnes de Dransberg, d'Ochſenberg & de Seſebeutel des environs de Göttingue, dont les minéraux & les circonſtances particulieres avoient engagé l'auteur d'en faire le ſujet d'une diſſertation, d'autant plus qu'il a voulu propoſer ſes idées ſur la formation des pierres de corne de l'Ochſenberg, qu'il attribue à une action du feu & de l'eau agiſſant de concert.

Digitized by Google

IV.

De tela dicta celluloſa obſeruationes continuatae: Cutis, ſubſtantia ſubcutanea, adeps.

Auctore *C. F. Wolff*, pag. 278.

Après avoir démontré (Voiez le Tom. VI. pag. 259.) par plufieurs expériences, & enfin par l'autopſie même, que la ſubſtance, qu'on nomme ordinairement le tiſſu cellulaire, n'eſt autre choſe qu'une ſimple ſubſtance glutineuse ſans aucune organiſation, & que c'eſt en la traitant pour l'obſerver, que nous en tirons des filèts de diverſes éſpeces, que nous croyons alors y avoir exiſtés naturellement, avant que la ſubſtance eut été étendue; l'Auteur parcourt les parties, qui ſont compoſées de cette ſubſtance glutineuſe, ou qui ſont de diverſes eſpèces. Ce ſont donc la peau, la ſubſtance ſubcutanée & la graiſſe, qu'il décrit dans cette diſſertation.

La peau, cinq fois plus épaiſſe que l'épiderme, eſt une ſubſtance uniforme, comme la glutineuſe commune, ſans cellules ni lamelles ou filèts. Elle diffère pourtant de celle-ci par ſon plus grand degré de denſité. Elle eſt plus endurcie, & ne peut point être tirée en filèts, elle ſe montre plutôt élaſtique, & ſe rétrécit, lorsqu'elle a été étendue. L'épiderme la ſurpaſſe encore d'avantage dans ces qualités, & rompt pluſtôt, que de ſe laiſſer étendre.

La ſubſtance ſubcutanée, qui eſt immédiatement deſſous la peau, eſt deux fois plus épaiſſe que celle-ci. Elle eſt plus molle auſſi, & ſe laiſſe étendre en filèts; de ſorte qu'elle approche plus à la nature de la ſubſtance glutineuse commune. Elle eſt diviſée en deux couches, dont l'extérieure eſt moins molle, & participe plus de la nature de la peau, que l'inté-

térieure de celle de la ſubſtance glutineuse. L'une & l'autre de ces deux couches n'ont ni cellules ni lamelles ni filèts.

On s'imagine ordinairement, que la peau, la ſubſtance ſubcutanée & la glutineuse commune, étant également du tiſſu cellulaire, ſeulement que la peau ſoit plus condenſée, la ſubcutanée & la glutineuse commune plus rarefiées; la peau ſe change peu à peu & inſenſiblement en ſubſtance ſubcutanée & enfin en cellulaire commune; de ſorte qu'on ne puiſſe définir exactement où la peau p. e. finiſſe & où la ſubſtance ſubcutanée commence, & qu'en général il n'y ait point de certaines limites entre ces trois couches de diverſes ſubſtances. Mais c'eſt une fauſſe idee, que l'on s'eſt fait de ces tégumens de nôtre corps. La peau eſt non ſeulement bien diverſe de la ſubſtance ſubcutanée, elle ne rétient pas même toutes ſes qualités uniformement par toute ſon épaiſſeur, comme la couche extérieure rétient les ſiennes & ſe diſtingue par là auſſi bien de la peau que de la couche intérieure, lorsqu'on les examine par le microſcope; mais tout comme l'épiderme peut être ſéparé de la peau, de même & avec la même facilité, peut auſſi être ſéparée la peau de la ſubſtance ſubcutanée, ainſi que la couche extérieure de celle-ci, de ſon inférieure.

Après la ſubſtance ſubcutanée ſuit au deſſous immédiatement la graiſſe, de manière que la peau & la ſubſtance ſubcutanée ſont par elle entièrement ſéparées de la glutineuſe commune, & que par conſéquent il ne ſe peut point faire, que la peau ſe change ſucceſſivement en glutineuſe. La graiſſe eſt compoſée de molécules plus ou moins compactes, ſelon que la graiſſe ſe trouve en plus ou moins grande quantité dans un endroit. On diſtingue facilement ces molécules ſans aide du microſcope; auſſi ſont elles aſſez connues. Mais quand on examine la graiſſe par le microſcope, on voit, que les molécules elles mêmes ſont com-

compoſées d'innombrables petites véſicules jaunes, formées d'une pellicule très mince & très pellucide, remplies d'un fluide huileux, qu'elles cohaerent enſemble & produiſent par leur compoſition ces molécules. On pourroit prendre ces véſicules pour des globules, car il n'y a rien dans leur aſpect extérieur, qui les en diſtingue. Mais il ne fut pas difficile à l'Auteur de rompre ſous le microſcope à l'aide d'une fine éguille ces véſicules, & de diſtinguer ainſi leur pellicules rompues de la petite goutte de fluide diſperſée ſur l'orbite du microſcope.

Les pellicules ſont faites de ſubſtance glutineuſe commune, bien tendre & ductile au plus haut degré. On voit cette ſubſtance pure & ſans graiſſe entre les molécules, faiſant des interſtices entre-elles aux endroits, où dans les hommes fort gras il y a de la graiſſe. Les véſicules ſe forment de la même manière dans la glutineuse que les bulles aériennes. Le fluide huileux tranſpire en petites gouttes par les parois des artères, étend la glutineuse qui par tout les entoure, & en fait de petites bulles remplies de ces gouttes du fluide transſpiré.

Comme il y a une eſpèce de grains ou de globules, diſperſés dans la ſubſtance ſubcutanée & dans celle de la peau, aſſés diſtincts & même jaunâtres dans la couche intérieure de la ſubſtance ſubcutanée, qui couvre immédiatement la graiſſe, mais moins déterminés & blancs dans la couche extérieure & dans la peau; il eſt très vraiſemblable, que ces globules ne ſont que des véſicules comme celles de la graiſſe, remplies d'un fluide mucilagineux, & que par conſéquent la peau ſe change par degrés & même ſenſiblement en graiſſe plutôt, qu'en ſubſtance glutineuſe.

Les

Digitized by Google

Les véſicules de la graiſſe diffèrent dans les divers animaux en proportion de leur grandeur. La graiſſe de la poule contient les véſicules les plus petites entre toutes celles, que l'auteur a obſervées. Elles ne ſont point compactes & les molécules ſont diſperſées. La graiſſe de l'oye les a plus grandes. Auſſi forment-elles dans cet oiſeau des molécules plus régulières & d'une figure plus déterminée, au lieu que les molécules des autres graiſſes ſont entièrement irrégulières & pour la figure & pour la grandeur. Les véſicules de la graiſſe humaine ſurpaſſent en grandeur celles de l'oye & de la poule, & ſont ſurpaſſées elles mêmes par celles de la graiſſe de boeuf. Mais les véſicules les plus grandes de la graiſſe, que l'auteur a obſervées, ſont celles du porc.

Sous la graiſſe ſe trouve une couche de ſubſtance glutineuſe, qui tient le milieu entre la graiſſe & la glutineuſe commune. Elle contient des trains de véſicules, rarément diſperſées, & ſéparées par de larges interſtices, remplies de la pure ſubſtance glutineuſe, qui, comme la commune, eſt dépourvue de toute organiſation. On pourroit nommer cette couche *la membrane adipeuſe.* C'eſt elle, dans laquelle ſe meuvent les vaiſſeaux & les nerfs, dont les rameaux en montant penétrent la graiſſe, pour ſe diſtribuer & ſe conſumer dans la peau & la ſubſtance ſubcutanée.

Ce ſont donc 1.) l'épiderme 2.) la peau couverte du réſeau de Malpigh, 3.) la ſubſtance ſubcutanée diviſée en deux couches, 4.) la graiſſe, & 5.) la membrane adipeuſe, qui forment les tégumens de nôtre corps. La glutineuſe commune, qui eſt ſous la membrane adipeuſe, entant qu'elle continue entre les muscles & toutes les autres parties pour les envelopper, ne peut pas être contée parmi les tégumens communs du corps.

V.

Biga muraenarum, nouae ſpecies deſcriptae.

a *Baſilio Zuiew*, pag. 296.

M. l'Académicien Zouyev donne ici la déſcription de deux nouvelles eſpèces de murène, qui ſe trouvent dans le Muſée académique. Il les compare avec les murènes *Caeca* & *Ophis* de Linné & fait voir, que jusqu'apréſent elles n'ont pas encore été connues des Ichthyologues.

VI.

Notice ſur le Schoerl rouge de Sarapoulskoi en Sibérie.

Par M. *Hermann*, pag. 302.

M. l'Académicien Hermann aprês avoir fait la découverte d'une nouvelle eſpèce de Schoerl aux environs du village de Sarapoulskoy dans le Gouvernement de Perme, en donne ici la déſcription. Ce Schoerl dont on a vendu ci-devant une petite grouppe pour 200 jusqu'à 300 Roubles, eſt de couleur de roſe foncée & ſe trouve ſur la pente orientale d'une montagne iſolée & compoſée d'un granit fort remarquable par l'arrangement de ſes parties conſtituantes; mais ce n'eſt que dans la terre végétale provenue de la décompoſition du Granit qu'il faut chercher le Schoerl. On ne le trouve qu'en petits cryſtaux qui repréſentent pour la pluspart des éguilles minces réunies en bouquets ou faiſſeaux conformes. Ordinairement il a des fiſſures & des fentes intérieures. Et M. l'Académicien Hermann n'en a vu aucun cryſtal qui auroit été tout à fait net. Au reſte ces cryſtaux ſont luiſans à leur ſurface & plus grainuleuſes que feuilletées dans la caſſure transverſale.

Cent

Digitized by Google

Cent grains de cette eſpéce de Schoerl contiennent 47 grains de terre ſilicieuſe, 28 de terre d'alun, 10 de terre de ſerpentine, 7 de terre calcaire, 2 de manganèſe & 6 de perte.

VII.
Eſſay ſur les pierres de roche compoſées. Partie premiere.

Par M. *Baſile Sewerguine*, pag. 313.

Le but de l'auteur eſt de raſſembler les différentes eſpéces de pierres de roche compoſées ſous un ſyſtème. La Diſſertation conſiſte en cinq paragraphes dont le premier n'eſt qu'une introduction, qui contient quelques idées ſur l'hiſtoire des pierres de roche compoſées. Au paragraphe ſecond il indique leurs caractères diſtinctifs. Dans le troiſième il traite des différentes eſpêces qui ont été rapportées au genre des pierres de roche compoſées & fait ſes objections contre les ſyſtèmes & les déſcriptions qu'on en avoit faites. Le quatrieme & le cinquieme paragraphe préſentent la maniere dont l'auteur ſe propoſe de les claſſifier.

VIII.
Methodus noua acetum concentrandi, eiusque acidum ad formam ſolidam cryſtallinam absque omni mixtione perducendi.

Auctore *Tobia Lowitz*, pag. 330.

Le vinaigre fort & pur étant de la plus grande importance pour les médecins & les chymiſtes, M. l'Adjoint Lowitz s'en avoit occupé depuis pluſieurs années & ce n'eſt qu'aprés avoir fait des expériences presque innombrables, qu'il

eſt parvenu au but de lui donner toute la perfection requiſe. Il trouva qu'on pouvoit avoir un vinaigre fort & très excellent par la ſeule congélation & par des déſtillations repétées ſans addition, en y ajoutant ſeulement de la poudre de charbon. L'obſervation la plus importante dans cette méthode de donner au vinaigre un degré ſuffiſant de perfection, c'eſt d'en bien dégager la partie de l'éſprit qui empêche la congélation, tout à la premiere déſtillation du vinaigre crud, congelé auparavant autant qu'il eſt poſſible. Le vinaigre privé de l'éſprit acquiert la proprieté de géler encore beaucoup plus. Pour la partie de l'éſprit ſeparé, il donne un vrai aether de vinaigre, lorsqu' étant privé de toute partie aqueuſe, on le mêle de nouveau avec le vinaigre, qui avoit déja été gélé entierément, & qu'on le dégage aprés par la déſtillation. Il a dans cet état la propriété particuliere & utile d'ôter au vinaigre pendant la déſtillation les parties jaunes & huileuſes produites par l'Empyreuma, & de les conduire tout au commencement dans le recipient, de ſorte que le vinaigre qui étoit jaune auparavant reſte pur & clair dans la retorte.

C'étoit une opinion générale jusqu'à préſent, que le vinaigre ne pouvoit jamais prendre la forme de cryſtaux dures. Le 10 de Décembre de l'année 1788 M. l'Adjoint Lowitz trouva le contraire, en faiſant la découverte que l'acide du vinaigre parfaitement pur prend réellement la forme de cryſtaux, & qu'il montre alors les plus variés & les plus beaux phénomènes de la cryſtalliſation, dans lesquels aucun des ſels qui ſont connus jusqu'à préſent, ne le peut égaler. Que l'on mêle dans une retorte une quantité du vinaigre très concentré par la congélation & la déſtillation avec beaucoup de poudre de charbons, & que l'on continue la déſtillation dans un bain de l'eau, jusqu'à ce qu'on ne voit plus paſſer une

goutte.

goutte. Qu'on mette enſuite la retorte avec la poudre de charbon, qui eſt reſtée & qui ſemble être ſéche, dans une bain de ſable, qu'on augmente la chaleur & on recevra enfin encore une partie d'un acide trés fort, qui ſe cryſtalliſe presque entiérement dans un grand froid. Si par le froid l'on dégage enfin ces cryſtaux glacieux de toute fluidité, on aura dans les cryſtaux qui reſtent, une glace de vinaigre trés forte, qui pour devenir fluide demande une temperature de 125 degrés de Del'isle & qui à l'égard de ſa pureté ſupporte toutes les épreuves.

IX.

Déſcription des mines de Woëtsk & Hiſtoire de leur exploitation.

Par M. *N. Ozeretskovsky*, pag. 346.

On trouve dans ce mémoire la Situation de la miniére de Woëtsk, & les ſubſtances que contient la montagne Woëtskaïa, dans laquelle ſe trouve la dite miniére. Enſuite l'hiſtoire de la découverte de cette minière, de laquelle on ne tiroit premièrement que des pyrites cuïvreuſes, mais bientôt après auſſi de l'or. Enfin les travaux dans cette minière, & la quantité d'or & de cuivre qu'on en a retiré pendant 26 ans de travaux. Elle fut enſuite abandonnée & repriſe de nouveau. Suivent les arrangemens qu'on y fit; combien on en avoit encore obtenu d'or, & avec quelles ſubſtances on en a tiré le plus. S'il y a éſperence enfin de découvrir quelques minéraux riches en métal dans ce pays du Nord?

Digitized by Google

X.

Novae Species plantarum; deſcriptae

A *P. S. Pallas*, pag. 353.

L'Auteur décrit ici quatre nouvelles eſpèces de plantes qu'il a cultivées dans ſon jardin. La premiere eſt l'amandier, un des plus beaux arbriſſeaux indigènes en Sibérie, que notre ſavant Académicien nomme pédiculaire. M. Gmelin l'Oncle ſemble l'avoir confondu avec l'amandier nain: mais l'ingénieux Botaniſte Louis Patrin, qui le premier a obſervé avec une attention plus ſcrupuleuſe cet abriſſeau qui croit aux environs d'Irkoutzk ſur le rivage de l'Angare, en en ayant envoyé des fruits murs, M. Pallas a d'abord reconnu la différence qui ſe trouve entre cet amandier & celui qu'on connoit ſous le nom d'amandier nain.

La ſeconde eſpèce eſt un poirier à feuilles d'olivier, *Pyrus elaeagrifolia*, que le célébre Tournefort rapporte ſous le nom de poirier ſauvage du Lévant, à feuilles longues & griſâtres, & que notre auteur avoit d'abord appellé le poirier à feuilles de ſaune: mais après avoir reçu de la Tauride quelques exemplaires de ſes fleurs ſechées & des branches fraiches, qu'il a enteés avec ſuccès ſur des troncs de pomier ordinaire, il a reconnu que le poirier dont il eſt queſtion ici approche très près du poirier de neige du célébre Jacquin. Cependant n'en ayant pas obtenu des fruits murs, il laiſſe la queſtion indéciſe & ſe contente de donner ici la déſcription de ſes branches, feuilles & fleurs.

La troiſième eſpèce eſt une *Aſtrantia maxima*, dont notre Académicien avoit reçu les ſémences cueillies en automne

aux

aux ſommets des hautes montagnes du Caucaſe. Ces ſemences lui ont produit dans ſon jardin une plante, qui par ſes feuilles & les autres parties, ainſi que par ſa grandeur, diffère conſidérablement des autres Sanicles de montagne connues ſous les noms des *Aſtrantia maior* & *minor*.

L'Auteur après avoir fait l'hiſtoire de la derniere eſpèce de plantes qu'il s'étoit propoſé de décrire dans ce mémoire, il rend raiſon pourquoi au lieu d'en former un nouveau genre il la déſigne plustôt du nom dubieux d'*Anciſtrum*? *apetalum*, & il finit par donner une déſcription exacte & détaillée de toutes ſes parties.

CLAS-

Digitized by Google

CLASSE D'ASTRONOMIE.

I.

Obſeruatio eclipſis Solis Anno 1791 die 23 Mart. / 3 April. Petropoli inſtituta.

Auctore *Stephano Rumovski*, pag. 363.

L'Auteur rapporte ici les obſervations qu'il a faites pour regler le mouvement de ſa pendule. Enſuite il indique en temps vrai les momens du commencement & de la fin de l'eclipſe.

II.

Méthode à la portée des navigateurs, pour réduire en diſtance vraie la diſtance apparente de la Lune au Soleil ou à une étoile fixe.

Par M. *Wolffg. Louis Krafft*, pag. 365.

De tous les moyens que l'Aſtronomie offre à la Marine pour déterminer la longitude géographique du vaiſſeau, les obſervations des diſtances de la Lune au Soleil ou à quelque autre étoile fixe connue, ont emporté presque généralement le ſuffrage des Aſtronomes. Grace aux inſtrumens ingénieux qui ont été inventés pour ces ſortes d'obſervations, la prâtique n'en eſt plus ſujette à aucune difficulté; il appartient aux Mathématiques d'écarter auſſi celle, que le Marinier pourroit rencontrer dans le calcul qu'il eſt obligé de faire, pour dégager la diſtance obſervée des effets de la parallaxe & de la réfraction, dont elle eſt néceſſairement affectée. Malgré les ſoins que les Aſtronomes mathématiciens ſe ſont donnés pour

pour cet effet en faveur de la Marine, & les regles tres-ingénieuſes qu'ils ont publiées pour ſimplifier ce calcul; il faut pourtant avouer, qu'il n'en eſt aucune, qui à la condition indiſpenſable d'être rigoureuſe, joigne l'avantage également néceſſaire d'être à la portée au moins de la plûpart des Mariniers, & de les mettre, autant que poſſible, à l'abri de toute ſorte de mépriſe. M. Krafft ſousmet, dans ce mémoire, au jugement des Aſtronomes l'eſſai d'une telle méthode, qui ſemble approcher plus qu'aucune autre de ces trois avantages, qu'on s'eſt appliqué de tant de manieres à obtenir dans cette partie importante du calcul nautique. Cette méthode eſt rigoureuſe, car l'auteur l'a tirée des principes exacts de la Trigonométrie ſphérique; elle eſt ſure, car elle bouche autant que poſſible toute ſource de mépriſes de la part du calculateur; on n'y rencontre aucune diſtinction des cas, aucune quantité tantôt poſitive, tantôt négative, & toute la marche du calcul eſt conſtamment la même; enfin elle doit ſans doute être cenſée ne pas excéder la portée des Aſtronomes marins, parcequ'elle ne ſuppoſe aucune connoiſſance des lignes trigonometriques ni du calcul logarithmique, & ne demande que les plus ſimples opérations de l'Arithmétique élémentaire. Il ne faut pour l'emploi de cette méthode que deux Tables, dont la conſtruction & l'uſage n'ont aucune difficulté, de façon que, ſi toutefois cet eſſai pouvoit mériter l'attention des Aſtronomes-Navigateurs, il ſeroit très-facile de leur fournir tout ce qu'il faudroit, pour la pratiquer ſur les vaiſſeaux.

Digitized by Google

III.

Obſeruatio eclipſis Solaris die $\frac{23 \text{ Mart.}}{3 \text{ April.}}$ 1791 Petropoli in ſpecula aſtronomica, teleſcopio Shortii $2\frac{1}{2}$ pedum facta.

Auctore *Petro Inochodzow*, pag. 378.

Après avoir reglé le mouvement de la pendule par des hauteurs correſpondantes du Soleil, priſes quelques jours avant & après cette eclipſe, M. Inochodzow trouve par ſon obſervation le commencement de l'eclipſe à une ou deux ſecondes près à $2^h. 56'. 30''$ temps vrai, & la fin avec la derniere préciſion à $5^h. 21'. 26''$ temps vrai. Pendant l'intervalle entre ces deux momens principaux ont auſſi été obſervées les imerſions & émerſions des tâches vues au Soleil, ainſi que les appulſes des limbes du Soleil & de la Lune, de même que les paſſages des cornes par les fils du micromêtre au quart de cercle.

IV.

De eclipſi Solis Anno 1791 die $\frac{23 \text{ Martii}}{3 \text{ April}}$ Petropoli obſeruata.

Auctore *Stephano Rumovski*, pag. 382.

Outre l'obſervation de cette eclipſe faites à St. Pétersbourg, à laquelle l'Auteur revient dans ce mémoire, il rapporte encore celles du même phénomène faites à Paris & à Palerme, qu'il ſousmet au calcul. Il trouve par les équations finales la Longitude de Palerme depuis le méridien de Paris de $44'. 0''$ à l'Eſt, & celle de l'obſervatoire de St. Pétersbourg d'$1^h. 51'. 52''$, qui étant de quelques ſecondes plus petite que

Digitized by Google

que celle qu'on a reçu jusqu'ici, on pourroit ſoupçonner qu'on a commis une erreur de quelques ſecondes de temps ſoit dans le commencement ſoit dans la fin de l'eclipſe. Cependant il eſt toujours remarquable que la pluspart des recherches pareilles, qu'on a faites jusqu'ici pour vérifier la longitude de l'obſervatoire de St. Pétersbourg, s'accordent de la donner plus petite que celle qu'on ſuppoſe ordinairement.

Il ſuit encore du calcul de l'auteur que le moment de la conjonction a été pour le méridien de Paris à $0^h. 51'. 27''$, ou pour celui de Greenwich à $0^h. 42'. 7''$, ce qui donne une erreur des tables en excès de $7''$ en longitude. L'erreur des tables en latitude reſte en ſuspens, parceque la correction de la latitude conclue pour le commencement & la fin, ne s'accorde abſolument pas avec celle que donnent les méſures des parties éclairées priſes vers le milieu de l'eclipſe.

V.

Eclipſis Lunae partialis die $\frac{30\ Sept.}{11\ Oct.}$ 1791, Petropoli in ſpecula academica, tubo Dollondiano tripedali, obſeruata.

Auctore *Petro Inochodzow*, pag. 388.

M. Inochodzof a vu avec aſſés de préciſion le commencement de cette eclipſe, qu'il trouve avoir été à $14^h. 1'. 50''$ temps vrai: il a pu obſerver auſſi les imerſions de pluſieurs tâches de la Lune dans l'ombre de la terre, mais bientôt après le milieu de l'eclipſe le ciel ſe couvrit de nuages fort épaiſſes, de ſorte qu'il n'a pu déterminer ni les émerſions des mêmes tâches ni la fin totale. Au reſte l'ombre de la terre, de

couleur cendrée, n'étoit pas bien terminée, de ſorte que les momens des imerſions n'ont pas pu être exactement annotées, & qu'il a fallu ſe contenter pour la pluspart d'un à peu près.

VI.

Extrait des obſervations météorologiques faites à St. Pétersbourg en l'année 1789 ſuivant le nouveau Stile.

Par M. *Jean-Albert Euler*, pag. 390.

La plus grande hauteur du Baromètre 29, 05 pouces, le 5 Janvier au ſoir.

La plus petite hauteur 27, 01, le 16 Février matin: ainſi la variation totale de 2, 04 pouces & le milieu 28, 03.

La hauteur annuelle moyenne = 28, 205, conſidérablement plus grande que dans les années précédentes. Auſſi le Baromètre a-t-il été 288 jours au deſſus de 28, 00, 246 jours au deſſus de 28, 10, & 194 jours au deſſus de 28, 20 pouces.

Le plus grand froid $25\frac{1}{2}$ degrés d'après la graduation de Réaumur, a été obſervé le 12 Janvier au ſoir.

La plus grande chaleur 24 degrés de Réaumur, le 19 Juillet à 2 heures après midi.

Le froid moyen depuis le 1 Novembre 1788 jusqu'au 1 Mai 1789 a été de $9\frac{1}{2}$ degrés, en prenant un milieu entre toutes les obſervations thermomètriques faites le matin & le ſoir, mais en choiſiſſant les obſervations qui ont été faites à 2 heures aprèsmidi, on trouve pour le froid moyen $4\frac{1}{4}$ degrés de Réaumur.

La

Digitized by Google

La chaleur moyenne depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1789, a été, en prenant les hauteurs thermomètriques obſervées à 2 heures après midi, de 13¾ degrés, & en prenant celles qui ont été obſervées le matin & le ſoir, de 9 degrés de Réaumur.

L'Auteur remarque au reſte 1.) que l'hyver de 1788 à 1789 a été beaucoup plus rude que l'hyver moyen, quoiqu'il ait été de 2 jours plus court, & que le plus grand froid n'ait pas été extraordinairement fort. 2.) Que l'été de 1789 a été l'un des plus beaux, qu'il a été beaucoup plus chaud que l'été moyen, & que l'intervalle entre la premiere gelée & la derniere a été de 9 jours plus long que dans l'année moyenne.

Digitized by Google

Errata.

Pag. 31. lin. 13. loco exponentis $n-n$ lege $n-1$.

— 72. — 12. loco $\begin{bmatrix} ab & x = 0 \\ ad & x = \nu \end{bmatrix}$ lege $\begin{bmatrix} ab & x = 0 \\ ad & x = 1 \end{bmatrix}$.

— 83. ad marginem loco Fig. 3. lege Fig. 2.

— 106. lin. 13. loco $\frac{2y}{1+xx-yy}$ lege $\frac{2y}{1+xx+yy}$.

— 151. — 24. — 0,017,17 lege 0,017417.

— 241. ad marginem adde Tab. V.

— 243. lin. 3. loco NOMENDATVRAE lege NOMENCLATVRAE.

— — — 11. loco ritae lege vitae.

— 296. lin. 7. loco perluſtrans lege perluſtranti.

— 14. — ophtis lege Ophis.

— 298. — 1. — te- lege ter-

— 2. — rue — ve

— 3. — definentibus lege deſinentibus.

— 7. — pupilliformes — papilliformes.

— 14. — parallelium — parallelorum.

— 301. linea vltima loco Dhalberghiana lege Dalberghiana.

— 381. linea vltima — Tab. XIII. lege Tab. III. Fig. 6.

— 383. lin. 2. loco 54′. 49″. 9 lege 54′. 44″. 9

— 385. — 7. — 8. 37 — 8. 27.

MATHE-

Digitized by Google

MATHEMATICA.

Digitized by Google

DE
FORMVLIS DIFFERENTIALIBVS,
QVAE PER DVAS PLVRESVE QVANTITATES DATAS MVLTIPLICATAE FIANT INTEGRABILES.

Auctore

L. EVLER.

Conuent. exhib. die 1 *Iul.* 1776.

§. 1.

Iam ſaepius eiusmodi quaeſtiones tractaui, quibus curuae algebraicae requiruntur, quarum longitudo per datam formulam integralem exprimatur. Ita nuper (*) infinitas curuas algebraicas mihi quidem aſſignare licuit, quarum longitudo ſiue per arcus Parabolicos, ſiue Ellipticos, menſurari queat; tum vero etiam plures alias formulas, quibus longitudo curuae exprimatur, ſatis felici ſucceſſu ſum perſcrutatus (**). Interim tamen ex his omnibus concludi debet, eam Analyſeos partem, ad quam huiusmodi quaeſtiones ſunt referendae, minime adhuc eſſe ſatis excultam, atque adeo etiamnunc quaſi prima principia latere, vnde huiusmodi quaeſtionum ſolutionem peti oporteat. Plurimum igitur ad fines Analyſeos promouendos conferre putandum eſt, ſi hoc argumentum Geometrae omni cura vlterius proſequi dignabuntur.

A 2 §. 2.

(*) C. Nov. Act. Acad. Tom. V. pro Anno 1787.
(**) C. Nov. Act. Acad. Tom. VI. pro Anno 1788.

Digitized by Google

§. 2. Quando autem quaeſtio proponitur de curuis Algebraicis inueniendis, quarum elementum indefinitum formula differentiali quadam praeſcripta ∂s exprimatur, totum negotium eo reducitur, vt angulus quispiam Φ inueſtigetur, ex quo hae duae formulae differentiales ∂s ſin. Φ et ∂s coſ. Φ integrabiles euadant. Quae inueſtigatio cum in genere ne ſuſcipi quidem queat, quaeſtionem inuerſam accuratius tractaſſe iuuabit, qua omnes eae formulae differentiales exquiruntur, quae tam per ſin. Φ quam per coſ. Φ multiplicatae reddantur integrabiles, cuius reſolutio cum nulla amplius laboret difficultate, eam in latiori ſenſu acceptam euoluamus, quo loco formularum ſin. Φ et coſ. Φ aliae quantitates quaecunque proponuntur. Quin etiam iſtam quaeſtionem ad tres pluresue huiusmodi quantitates extendamus. Quanquam autem methodum huiusmodi problemata ſoluendi iam ante complures annos adumbraui, qua noua quaedam pars Analyſeos Infinitorum, quam *indeterminatam* appellare liceat, conſtitui eſt cenſenda, tamen quoniam hoc argumentum tum nimis generaliter eſt tractatum, nunc operae pretium erit id maiori cura propius ad praeſens inſtitutum accommodare.

Problema I.

Inueſtigare omnes formulas differentiales, quae per datas duas quantitates propoſitas multiplicatae reddantur integrabiles.

Solutio.

§. 3. Deſignemus formulam differentialem quaeſitam charactere ∂W, ſintque p et q bini illi multiplicatores dati, quibus haec formula integrabilis reddi debeat; ita vt hae duae formulae integrales: $\int p \partial W$ et $\int q \partial W$ euadant quantitates algebraicae. Denotent igitur P et Q iſtas quantitates algebraicas, vt ſit $\int p \partial W = P$ et $\int q \partial W = Q$, atque hinc duplici mo-

Digitized by Google

modò ſponte elicitur $\partial W = \frac{\partial P}{p}$ et $\partial W = \frac{\partial Q}{q}$. Nunc igitur quaeſtio perducta eſt ad duas quantitates algebraicas P et Q inueſtigandas, quarum differentialia inter ſe teneant datam rationem vt $p : q$, ſiue vt ſit $\frac{\partial P}{\partial Q} = \frac{p}{q}$.

§. 4. Iſta quidem conditio certo reſpectu facillime adimpleri poteſt, ita vt adeo relatio quaecunque inter quantitates P et Q ſtatui poſſit. Namque ſi curua $a q$ ita referat binas quantitates datas p et q, vt ſumta abſciſſa $a p = p$, applicata $p q$ fiat $= q$, ſuper eodem axe conſtruatur pro lubitu curua quaecunque A Q, ac ſumto in priori curua puncto quocunque q, ductaque chorda $a q$, in altera curua capiatur punctum Q, ad quod ducta tangens Q T illi cordae $a q$ fiat parallela; quo facto coordinatae huius alterius curuae A P et P Q exhibebunt ipſas quantitates quaeſitas P et Q. Si enim ponamus $AP = P$ et $PQ = Q$, in triangulo P Q T vtique erit $PQ : PT = \partial Q : \partial P$. Cum igitur hoc triangulum ſimile ſit triangulo $p q a$, erit $\partial Q : \partial P = q : p$, quae eſt ipſa proportio requiſita. Tab. I. Fig. 1.

§. 5. Verum haec conſtructio, licet facilis ac plana, ad inſtitutum noſtrum parum confert; propterea quod inuentio puncti Q poſtulat reſolutionem aequationum cuiusque ordinis, quae tamen neutiquam eſt in noſtra poteſtate. Nam ſi natura curvae A Q hac tantum aequatione exprimatur:

$$Q = \alpha P + \beta P^2 + \gamma P^6$$

hinc fiet

$$\frac{\partial Q}{\partial P} = \alpha + 2 \beta P + 6 \gamma P^5$$

fractioni $\frac{q}{p}$ aequalis ſtatuenda, ita vt quantitas P erui debeat ex hac aequatione ordinis quinti: $\alpha + 2 \beta P + 6 \gamma P^5 = \frac{q}{p}$, cuius reſolutio vtique vires Algebrae ſuperat. Multo maiorem autem difficultatem offendemus, ſi aequatio inter P et Q magis

gis fuerit complicata, in eaque etiam altiores poteſtates ipſius Q occurrant; quamobrem ad inueniendas quantitates P et Q longe alia via nobis eſt ineunda.

§. 6. Cum igitur haec aequatio reſoluenda proponatur $\frac{\partial Q}{\partial P} = \frac{q}{p}$; vbi quantitates p et q vt datae ſpectantur: ponamus breuitatis gratia $\frac{q}{p} = t$, vt eſſe debeat $\frac{\partial Q}{\partial P} = t$, ideoque $\partial Q = t \partial P$, quae formula cum integrabilis eſſe debeat, ob $Q = \int t \partial P$ per reductiones notiſſimas habebimus $Q = tP - \int P \partial t$; ita vt tantum formula $\int P \partial t$ integrabilis ſit reddenda, id quod facillime praeſtatur, ponendo $\int P \partial t = T$. Hinc enim fiet $P = \frac{\partial T}{\partial t}$, vnde, quaecunque functio algebraica ipſius t pro T accipiatur, ſemper idoneum valorem pro quantitate P adipiſcimur, ſcilicet $P = \frac{\partial T}{\partial t}$; ex quo porro elicimus $Q = \frac{t \partial T}{\partial t} - T$, ſicque plene ſatisfactum erit conditioni requiſitae: $\frac{\partial Q}{\partial P} = \frac{q}{p} = t$. Sumto enim elemento ∂t conſtanti, erit

$$\partial P = \frac{\partial \partial T}{\partial t} \text{ et } \partial Q = \partial T + \frac{t \partial \partial T}{\partial t} - \partial T = \frac{t \partial \partial T}{\partial t}$$

vnde manifeſto prodit $\frac{\partial Q}{\partial P} = t$, vti requiritur. Eadem autem aequalitas prodiiſſet, etiamſi elementum ∂t non fuiſſet conſtans aſſumtum; tum enim prodiiſſet

$$\partial P = \frac{\partial t \partial \partial T - \partial T \partial \partial t}{\partial t^2} \text{ et}$$

$$\partial Q = \frac{\partial t^2 \partial T + t \partial t \partial \partial T - t \partial T \partial \partial t}{\partial t^2} - \partial T = \frac{t \partial t \partial \partial T - t \partial T \partial \partial t}{\partial t^2}$$

vnde iterum colligitur $\frac{\partial Q}{\partial P} = t$, vt ante.

§. 7. Inuentis autem duabus quantitatibus P et Q ipſa formula differentialis quaeſita ∂W duplici modo expreſſa habetur, ſcilicet vel $\partial W = \frac{\partial P}{p}$ vel $\partial W = \frac{\partial Q}{q}$, quae autem neceſſario ad eandem expreſſionem deducere debent; ex vtraque enim colligitur fore $\partial W = \frac{\partial t \partial \partial T - \partial T \partial \partial t}{p \partial t^2}$. Cum autem hic

ſit

ſit $t = \frac{q}{p}$, erit $\partial t = \frac{p\partial q - q\partial p}{pp}$; vnde cum ſit

$$P = \frac{\partial T}{\partial t}, \text{ erit } P = \frac{pp\partial T}{p\partial q - q\partial p},$$

vnde reperimus

$$\partial P = \frac{pp\partial\partial T}{p\partial q - q\partial p} + \frac{2p\partial p\partial T}{p\partial q - q\partial p} - \frac{pp\partial T(p\partial\partial q - q\partial\partial p)}{(p\partial q - q\partial p)^2}$$

hincque denique ipſa formula differentialis quaeſita erit

$$\partial W = \frac{p\partial\partial T}{p\partial q - q\partial p} + \frac{2\partial p\partial T}{p\partial q - q\partial p} - \frac{p\partial T(p\partial\partial q - q\partial\partial p)}{(p\partial q - q\partial p)^2}$$

tum autem neceſſario fiet, vti conſtituimus

$$\int p\partial W = P = \frac{pp\partial T}{p\partial q - q\partial p} \text{ et}$$

$$\int q\partial W = Q = \frac{pq\partial T}{p\partial q - q\partial p} - T.$$

Alia Solutio.

§. 8. Quoniam ambo multiplicatores praeſcripti q et p aequaliter in computum ingredi debebant, quod tamen in ſolutione inuenta longe ſecus euenit, vbi altera harum quantitatum p longe alia ratione ineſt atque altera q, operae pretium erit eiusmodi ſolutionem tradere, in quam ambae quantitates p et q pari ratione ingrediantur, ita vt, facta earum permutatione, formula pro ∂W inuenta nullam alterationem patiatur, quandoquidem haec circumſtantia ad elegantiam ſolutionis pertinere eſt cenſenda, licet ſolutio ante inuenta in ſe ſpectata quaeſtioni pariter perfecte ſatisfaciat.

§. 9. Maneant igitur in praecedente ſolutione omnia eadem vsque ad introductionem litterae T; et quoniam peruenimus ad hanc aequationem: $Q = tP - \int P\partial t$, vbi ob $t = \frac{q}{p}$ eſt $\partial t = \frac{p\partial q - q\partial p}{pp}$, quae formula denominatorem habet pp, ſtatuamus $\int P\partial t = \frac{v}{p}$, vt differentiando prodeat

$$\frac{P(p\partial q - q\partial p)}{pp} = \frac{p\partial v - v\partial p}{pp}$$

ſicque

ſicque obtinebimus

$$P = \frac{p\partial v - v\partial p}{p\partial q - q\partial p},$$

ex quo valore porro deducimus

$$Q = \frac{q}{p} \cdot \frac{p\partial v - v\partial p}{p\partial q - q\partial p} - \frac{v}{p},$$

quae expreſſio reducitur ad hanc:

$$Q = \frac{q\partial v - v\partial q}{p\partial q - q\partial p}$$

quae alteri P perfecte eſt analoga, dum valor ipſius Q ex P ſponte prodit permutatione litterarum p et q, ſolo ſigno excepto.

§. 10. Cum igitur inuenerimus $P = \frac{p\partial v - v\partial p}{p\partial q - q\partial p}$, per differentiationem nanciſcimur

$$\partial P = \frac{(p\partial q - q\partial p)(p\partial\partial v - v\partial\partial p) - (p\partial v - v\partial p)(p\partial\partial q - q\partial\partial p)}{(p\partial q - q\partial p)^2}$$

quae expreſſio, facta euolutione, reducitur ad hanc:

$$\partial P = \frac{p\partial\partial v(p\partial q - q\partial p) - p\partial v(p\partial\partial q - q\partial\partial p) + pv(\partial p\partial\partial q - \partial q\partial\partial p)}{(p\partial q - q\partial p)^2}.$$

Hinc igitur formula differentialis quaeſita ∂W ita exprimetur, vt ſit

$$\partial W = \frac{\partial\partial v(p\partial q - q\partial p) - \partial v(p\partial\partial q - q\partial\partial p) + v(\partial p\partial\partial q - \partial q\partial\partial p)}{(p\partial q - q\partial p)^2};$$

vbi ambae quantitates p et q manifeſto ſunt permutabiles, ſi quidem mutatio ſignorum nullum diſcrimen afferre eſt cenſenda.

§. 11. Iſta ſolutio non ſolum antecedentem ſupereminet inſigni elegantia, ſed etiam pariter eſt maxime generalis, quandoquidem quantitas v arbitrio noſtro penitus relinquitur; ideoque eius loco omnes plane functiones ipſarum p et q accipi poſſunt. At vero iſta expreſſio conditiones praeſcriptas ita adimplet, vt inde fiat

$$\int p\,\partial W = P = \frac{p\partial v - v\partial p}{p\partial q - q\partial p} \text{ et}$$

$$\int q\,\partial W = Q = \frac{q\partial v - v\partial q}{p\partial q - q\partial p}.$$

Quae

Digitized by Google

Quae ambae expreſſiones vtique ſunt algebraicae, dummodo pro v functiones algebraicae ipſarum p et q accipiantur.

§. 12. Iſti valores integrales nobis inſuper duas inſignes proprietates formulae differentialis inuentae declarant, quae in eo conſiſtunt, vt iſta formula ad nihilum redigatur, tam poſito $v = p$ quam $v = q$. Cum enim formula integralis $\int p \partial W$ manifeſto euaneſcat poſito $v = p$, neceſſe eſt vt etiam formula differentialis eodem caſu euaneſcat; quod idem de altera formula integrali eſt tenendum, quae caſu $v = q$ euaneſcit.

Corollarium.

§. 13. Quoniam ſolutio huius problematis eo eſt perducta, vt binae quantitates P et Q inveſtigentur, quarum differentialia ∂P et ∂Q datam inter ſe teneant rationem, vt $p : q$, operae pretium erit poſteriorem ſolutionem ſub forma theorematis memoriae imprimi.

Theorema.

§. 14. Si duae quantitates P et Q deſiderentur, quarum differentialia ∂P et ∂Q eandem inter ſe teneant rationem quam duae quantitates datae p et q, ita vt eſſe debeat $\frac{\partial P}{\partial Q} = \frac{p}{q}$, huic requiſito generaliſſime ſatisfiet, ſumendo

$$P = \frac{p \partial v - v \partial p}{p \partial q - q \partial p} \text{ et } Q = \frac{q \partial v - v \partial q}{p \partial q - q \partial p}$$

vbi quantitas v penitus arbitrio noſtro eſt relicta.

Exemplum 1.

§. 15. *Inuenire formulam differentialem ∂W, quae tam per ſinum quam per coſinum cuiuspiam anguli variabilis Φ multiplicata euadat integrabilis.*

Hic ergo erit $p = \text{ſin.}\,\Phi$ et $q = \text{coſ.}\,\Phi$, hincque differentiando (vbi quidem elementum $\partial\Phi$ conſtans aſſumamus) prodibit

$$\partial p = \partial\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi \text{ et } \partial q = -\partial\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi$$

porroque

$$\partial\partial p = -\partial\Phi^2\,\text{ſin.}\,\Phi \text{ et } \partial\partial q = -\partial\Phi^2\,\text{coſ.}\,\Phi$$

vnde formulae, quae in expreſſionem ipſius ∂W ingrediuntur, ſequentes valores ſortientur:

I. $p\,\partial q - q\,\partial p = -\partial\Phi$,
II. $p\,\partial\partial q - q\,\partial\partial p = 0$,
III. $\partial p\,\partial\partial q - \partial q\,\partial\partial p = -\partial\Phi^3$,

ex quibus valoribus ergo concluditur formula differentialis quaeſita

$$\partial W = -\frac{\partial\partial v}{\partial\Phi} - v\,\partial\Phi.$$

§. 16. Quod haec formula prodiit negatiua, negotium nullo modo turbat, ac tuto ſtatuere poterimus

$$\partial W = v\,\partial\Phi + \frac{\partial\partial v}{\partial\Phi}$$

ſumto ſcilicet elemento $\partial\Phi$ conſtante; tum autem pariter, mutatis ſignis, erit

$$\int\partial W\,\text{ſin.}\,\Phi = \frac{\partial v\,\text{ſin.}\,\Phi}{\partial\Phi} - v\,\text{coſ.}\,\Phi \text{ et}$$

$$\int\partial W\,\text{coſ.}\,\Phi = \frac{\partial v\,\text{coſ.}\,\Phi}{\partial\Phi} + v\,\text{ſin.}\,\Phi.$$

Tum vero etiam euidens eſt ipſam formulam ∂W euaneſcere, tam caſu $v = \text{ſin.}\,\Phi$ quam caſu $v = \text{coſ.}\,\Phi$.

§. 17. Quodſi ergo formula ∂W exprimat elementum cuiuspiam lineae curuae ∂s, vt ſit $\partial s = v\,\partial\Phi + \frac{\partial\partial v}{\partial\Phi}$, quaecunque functio algebraica fuerit v, ſemper curua algebraica exhiberi poterit. Conſtitutis enim coordinatis orthogonalibus x et y,

ſi

ſi ſumatur $\partial x = \partial s \operatorname{coſ.} \Phi$ et $\partial y = \partial s \operatorname{ſin.} \Phi$, vt fiat $\partial x^2 + \partial y^2 = \partial s^2$, quia ambae hae formulae ſunt integrabiles, coordinatae curuae quaeſitae erunt

$$x = \frac{\partial v \operatorname{coſ.} \Phi}{\partial \Phi} + v \operatorname{ſin.} \Phi \text{ et } y = \frac{\partial v \operatorname{ſin.} \Phi}{\partial \Phi} - v \operatorname{coſ.} \Phi,$$

vbi notaſſe iuuabit fore $xx + yy = \frac{\partial v^2}{\partial \Phi^2} + vv$. Praeterea vero ſi formula $\int v \partial \Phi$ integrationem admittat, tum curua ipſa erit rectificabilis; fiet enim $s = \int v \partial \Phi + \frac{\partial v}{\partial \Phi}$.

Scholion.

§. 18. Quo inſignis vſus huius tractationis vberius ob oculos ponatur, tam huic exemplo, quam ſequentibus, cuique problema ſpeciale adiungamus, in quo integratio cuiuspiam aequationis differentialis ſecundi gradus perficiatur; quod ſaepiſſime egregium vſum habere poterit.

Problema ſpeciale I.

§. 19. *Si* Φ *denotet functionem quamcunque ipſius* ϕ, *reſoluere iſtam aequationem differentialem ſecundi gradus:*

$$v \partial \phi + \frac{\partial \partial v}{\partial \phi} = \Phi \partial \phi$$

in qua elementum $\partial \phi$ *conſtans eſt aſſumtum, ſiue per integrationem inuenire valorem ipſius* v.

Quia iam inuenimus huius aequationis membrum ſiniſtrum integrabile fieri duobus caſibus, dum vel per ſin. ϕ vel coſ. ϕ multiplicatur, membrum autem dextrum iam eſt functio ipſius ϕ tantum; eius integratio nulla laborat difficultate. Primo enim haec aequatio in ſin. ϕ ducta et integrata dabit

$$\frac{\partial v \operatorname{ſin.} \phi}{\partial \phi} - v \operatorname{coſ.} \phi = \int \Phi \partial \phi \operatorname{ſin.} \phi;$$

at vero multiplicatio per coſ. ϕ praebebit

$$\frac{\partial v \operatorname{coſ.} \phi}{\partial \phi} + v \operatorname{ſin.} \phi = \int \Phi \partial \phi \operatorname{coſ.} \phi.$$

Digitized by Google

§. 20. Cum igitur iam geminam habeamus aequationem primi gradus, ſine vlla vlteriori integratione valorem quantitatis v elicere poterimus: prior enim in coſ. Φ ducta et a poſteriori in ſin. Φ ducta ablata perducet ad hanc aequationem:

$$v = \text{ſin.}\,\Phi \int \Phi\, \partial \Phi \,\text{coſ.}\,\Phi - \text{coſ.}\,\Phi \int \Phi\, \partial \Phi\, \text{ſin.}\,\Phi,$$

quod integrale vtique eſt completum, propterea quod, ob binas formulas integrales, geminam conſtantem arbitrariam inuoluit.

§. 21. Quoniam per reductiones notiſſimas eſt

$$\int \Phi\, \partial \Phi\, \text{ſin.}\,\Phi = -\Phi\, \text{coſ.}\,\Phi + \int \partial \Phi\, \text{coſ.}\,\Phi \text{ et}$$

$$\int \Phi\, \partial \Phi\, \text{coſ.}\,\Phi = \Phi\, \text{ſin.}\,\Phi - \int \partial \Phi\, \text{ſin.}\,\Phi,$$

ſi hi valores ſubſtituantur, valor ipſius v etiam hoc modo exprimi poterit:

$$v = \Phi - \text{ſin.}\,\Phi \int \partial \Phi\, \text{ſin.}\,\Phi - \text{coſ.}\,\Phi \int \partial \Phi\, \text{coſ.}\,\Phi.$$

Exemplum 2.

§. 22. *Inuenire formulam differenticlem ∂W, quae tam per tangentem, quam ſecantem cuiuspiam anguli variabilis Φ multiplicata euadat integrabilis.*

Hic igitur eſto $p = \text{tang.}\,\Phi$ et $q = \text{ſec.}\,\Phi$, unde ſequitur

$$\partial p = \frac{\partial \Phi}{\text{coſ.}\,\Phi^2} \text{ et } \partial q = \frac{\partial \Phi\, \text{ſin.}\,\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi^2},$$

porro vero

$$\partial \partial p = \frac{2\,\partial \Phi^2\, \text{ſin.}\,\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi^3} \text{ et } \partial \partial q = \frac{\partial \Phi^2}{\text{coſ.}\,\Phi} + \frac{2\,\partial \Phi^2\, \text{ſin.}\,\Phi^2}{\text{coſ.}\,\Phi^3}, \text{ ſiue}$$

$$\partial \partial q = \frac{2\,\partial \Phi^2}{\text{coſ}\,\Phi^3} - \frac{\partial \Phi^2}{\text{coſ.}\,\Phi}.$$

Hinc igitur colliguntur ſequentes aequationes:

I. $p\, \partial q - q\, \partial p = -\frac{\partial \Phi}{\text{coſ.}\,\Phi}$.

II. $p\, \partial \partial q - q\, \partial \partial p = -\frac{\partial \Phi^2}{\text{coſ.}\,\Phi} \text{tang.}\,\Phi = -\frac{\partial \Phi^2\, \text{ſin.}\,\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi^2}$.

III. $\partial p\, \partial \partial q - \partial q\, \partial \partial p = \frac{\partial \Phi^3}{\text{coſ.}\,\Phi^3}$.

Ex

Digitized by Google

Ex quibus ergo valoribus concluditur formula differentialis quaeſita

$$\partial W = -\frac{\partial \partial v \cos. \Phi}{\partial \Phi} + \partial v \sin. \Phi + \frac{v \partial \Phi}{\cos. \Phi}.$$

§. 23. Ternos autem illos valores facilius hoc modo reperire licet. Primo enim cum ſit $\frac{q}{p} = \frac{1}{\sin. \Phi}$, erit differentiando

$$\frac{p \partial q - q \partial p}{p p} = -\frac{\partial \Phi \cos. \Phi}{\sin. \Phi^2},$$

vnde per $p p = \frac{\sin. \Phi^2}{\cos. \Phi^2}$ multiplicando oritur

$$p \partial q - q \partial p = -\frac{\partial \Phi}{\cos. \Phi},$$

quae denuo differentiata dat

$$p \partial \partial q - q \partial \partial p = -\frac{\partial \Phi^2 \sin. \Phi}{\cos. \Phi^2}.$$

Deinde cum ſit $\frac{\partial q}{\partial p} = \sin. \Phi$, erit differentiando

$$\frac{\partial p \partial \partial q - \partial q \partial \partial p}{\partial p^2} = \partial \Phi \cos. \Phi,$$

quae per $\partial p^2 = \frac{\partial \Phi^2}{\cos. \Phi^4}$ multiplicata dat

$$\partial p \partial \partial q - \partial q \partial \partial p = \frac{\partial \Phi^3}{\cos. \Phi^3}.$$

Cum igitur ſit

$$\partial W = -\frac{\partial \partial v \cos. \Phi}{\partial \Phi} + \partial v \sin. \Phi + \frac{v \partial \Phi}{\cos. \Phi}, \text{ erit}$$

$$\int p \partial W = P = \frac{v}{\cos. \Phi} - \frac{\partial v \sin. \Phi}{\partial \Phi} \text{ et}$$

$$\int q \partial W = Q = \frac{v \sin. \Phi}{\cos. \Phi} - \frac{\partial v}{\partial \Phi}.$$

Problema ſpeciale 2.

§. 24. *Denotante Φ functionem quamcunque anguli Φ, reſolvere iſtam aequationem ſecundi gradus:*

$$-\frac{\partial \partial v \cos. \Phi}{\partial \Phi} + \partial v \sin. \Phi + \frac{v \partial \Phi}{\cos. \Phi} = \Phi \partial \Phi.$$

Hic primo per tang. Φ multiplicando et integrando obtinetur haec aequatio primi gradus:

$$\frac{v}{\cos. \Phi} - \frac{\partial v \sin. \Phi}{\partial \Phi} = \int \Phi \partial \Phi \operatorname{tang}. \Phi;$$

at vero per ſec. Φ multiplicando et integrando prodit

$$\frac{v\,\text{ſin.}\,\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi} - \frac{\partial v}{\partial \Phi} = \int \Phi\,\partial\Phi\,\text{ſec.}\,\Phi.$$

Haec poſterior ducta in ſin. Φ et a priori ſubtracta dat

$$v\,\text{coſ.}\,\Phi = \int \Phi\,\partial\Phi\,\text{tang.}\,\Phi - \text{ſin.}\,\Phi \int \Phi\,\partial\Phi\,\text{ſec.}\,\Phi$$

ideoque

$$v = \text{ſec.}\,\Phi \int \Phi\,\partial\Phi\,\text{tg.}\,\Phi - \text{tg.}\,\Phi \int \Phi\,\partial\Phi\,\text{ſec.}\,\Phi$$

quae eſt integratio completa aequationis propoſitae.

§. 25. Denique hic annotaſſe iuuabit, ſi Φ denotet angulum, quem curuae cuiuſpiam elementum ∂s cum elemento abſciſſae ∂x conſtituit, atque ∂W exprimat ipſum elementum abſciſſae ∂x, tum fore elementum applicatae $\partial y = \partial x$ tang. $\Phi = p\,\partial W$, elementum vero curuae $\partial s = \partial x$ ſec. $\Phi = q\,\partial W$, unde ergo habebitur ipſa applicata

$$y = \frac{v}{\text{coſ.}\,\Phi} - \frac{\partial v\,\text{ſin.}\,\Phi}{\partial \Phi},$$

atque ipſa curuae longitudo erit

$$s = \frac{v\,\text{ſin.}\,\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi} - \frac{\partial v}{\partial \Phi}.$$

Cum igitur ſit

$$\partial x = -\frac{\partial\partial v\,\text{coſ.}\,\Phi}{\partial \Phi} + \partial v\,\text{ſin.}\,\Phi + \frac{v\,\partial\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi},$$

ſi modo haec formula etiam integrationem admittat, tum prodibit curua algebraica, ſimulque rectificabilis. Jam vero integrando, qua fieri licet, prodit

$$x = -\frac{\partial v}{\partial\Phi}\,\text{coſ.}\,\Phi - \int \partial v\,\text{ſin.}\,\Phi + \int \partial v\,\text{ſin.}\,\Phi + \int \frac{v\,\partial\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi} = -\frac{\partial v\,\text{coſ.}\,\Phi}{\partial\Phi} + \int \frac{v\,\partial\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi}$$

Quam ob rem neceſſe eſt vt formula $\int \frac{v\,\partial\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi}$ integrationem admittat, veluti euenit, ſi ſumatur $v = \text{coſ.}\,\Phi^2$, tum enim erit $\int \frac{v\,\partial\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi} = \text{ſin.}\,\Phi$, atque ob

$$\partial v = -2\,\partial\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi$$

prodibit

x

$$x = 2 \sin. \Phi \cos. \Phi^2 + \sin. \Phi = \sin. \Phi (1 + 2 \cos. \Phi^2);$$

tum vero erit

$$y = \cos. \Phi (1 + 2 \sin. \Phi^2)$$

et arcus curuae

$$s = 3 \sin. \Phi \cos. \Phi.$$

Exemplum 3.

§. 26. *Inuenire formulam differentialem ∂W, quae ſiue multiplicata ſiue diuiſa per datam quantitatem t euadat integrabilis.*

Hic ergo hae duae formulae $t \partial W$ et $\frac{\partial W}{t}$ reddi debent integrabiles. Pro hoc igitur exemplo erit $p = t$ et $q = \frac{1}{t}$, unde fit $\partial p = \partial t$ et $\partial q = -\frac{\partial t}{tt}$. Cum ergo ſit $\frac{q}{p} = \frac{1}{tt}$, erit

$$\frac{p \partial q - q \partial p}{pp} = -\frac{2 \partial t}{t^3},$$

unde per $pp = tt$ multiplicando fit

$$p \partial q - q \partial p = -\frac{2 \partial t}{t};$$

quae formula porro differentiata, ſumendo ∂t conſtans, praebet:

$$p \partial \partial q - q \partial \partial p = + \frac{2 \partial t^2}{tt}.$$

Deinde quia eſt $\frac{\partial q}{\partial p} = -\frac{1}{tt}$, fiet

$$\frac{\partial p \partial \partial q - \partial q \partial \partial p}{\partial p^2} = \frac{2 \partial t^2}{t^3},$$

quae aequatio per ∂p^2 multiplicata praebet

$$\partial p \partial \partial q - \partial q \partial \partial p = \frac{2 \partial t^3}{t^3},$$

ex quibus valoribus colligitur formula quaeſita

$$\partial W = -\frac{t \partial \partial v}{2 \partial t} - \frac{1}{2} \partial v + \frac{v \partial t}{2t}$$

ſiue hunc valorem duplicando et ſigna mutando ſtatui poteſt

$$\partial W = \frac{t \partial \partial v}{\partial t} + \partial v - \frac{v \partial t}{t}.$$

§. 27. Multiplicemus igitur hanc formam per t vt fiat

$t \partial$

at vero per ſec. Φ multiplicando et integrando prodit

$$\frac{v\,\textit{ſin.}\,\Phi}{\textit{coſ.}\,\Phi} - \frac{\partial v}{\partial \Phi} = \int \Phi \partial \Phi\, \text{ſec.}\, \Phi.$$

Haec poſterior ducta in ſin. Φ et a priori ſubtracta dat

$$v\,\text{coſ.}\,\Phi = \int \Phi \partial \Phi\, \text{tang.}\, \Phi - \text{ſin.}\, \Phi \int \Phi \partial \Phi\, \text{ſec.}\, \Phi$$

ideoque

$$v = \text{ſec.}\, \Phi \int \Phi \partial \Phi\, \text{tg.}\, \Phi - \text{tg.}\, \Phi \int \Phi \partial \Phi\, \text{ſec.}\, \Phi$$

quae eſt integratio completa aequationis propoſitae.

§. 25. Denique hic annotaſſe iuuabit, ſi Φ denotet angulum, quem curuae cuiuſpiam elementum ∂s cum elemento abſciſſae ∂x conſtituit, atque ∂W exprimat ipſum elementum abſciſſae ∂x, tum fore elementum applicatae $\partial y = \partial x$ tang. $\Phi = p \partial W$, elementum vero curuae $\partial s = \partial x$ ſec. $\Phi = q \partial W$, unde ergo habebitur ipſa applicata

$$y = \frac{v}{\textit{coſ.}\,\Phi} - \frac{\partial v\,\textit{ſin.}\,\Phi}{\partial \Phi},$$

atque ipſa curuae longitudo erit

$$s = \frac{v\,\textit{ſin.}\,\Phi}{\textit{coſ.}\,\Phi} - \frac{\partial v}{\partial \Phi}.$$

Cum igitur ſit

$$\partial x = -\frac{\partial \partial v\,\textit{coſ.}\,\Phi}{\partial \Phi} + \partial v\,\text{ſin.}\,\Phi + \frac{v\,\partial \Phi}{\textit{coſ.}\,\Phi},$$

ſi modo haec formula etiam integrationem admittat, tum prodibit curua algebraica, ſimulque rectificabilis. Jam vero integrando, qua fieri licet, prodit

$$x = -\frac{\partial v}{\partial \Phi}\,\text{coſ.}\,\Phi - \int \partial v\,\text{ſin.}\,\Phi + \int \partial v\,\text{ſin.}\,\Phi + \int \frac{v\,\partial \Phi}{\textit{coſ.}\,\Phi} = -\frac{\partial v\,\textit{coſ.}\,\Phi}{\partial \Phi} + \int \frac{v\,\partial \Phi}{\textit{coſ.}\,\Phi}$$

Quam ob rem neceſſe eſt vt formula $\int \frac{v\,\partial \Phi}{\textit{coſ.}\,\Phi}$ integrationem admittat, veluti euenit, ſi ſumatur $v = \text{coſ.}\,\Phi^2$, tum enim erit $\int \frac{v\,\partial \Phi}{\textit{coſ.}\,\Phi} = \text{ſin.}\,\Phi$, atque ob

$$\partial v = -2 \partial \Phi\, \text{ſin.}\, \Phi\, \text{coſ.}\, \Phi$$

prodibit

$$x = 2\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi^2 + \text{ſin.}\,\Phi = \text{ſin.}\,\Phi\,(1 + 2\,\text{coſ.}\,\Phi^2);$$

tum vero erit

$$y = \text{coſ.}\,\Phi\,(1 + 2\,\text{ſin.}\,\Phi^2)$$

et arcus curuae

$$s = 3\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi.$$

Exemplum 3.

§. 26. *Inuenire formulam differentialem ∂W, quae ſiue multiplicata ſiue diuiſa per datam quantitatem t euadat integrabilis.*

Hic ergo hae duae formulae $t\,\partial W$ et $\frac{\partial W}{t}$ reddi debent integrabiles. Pro hoc igitur exemplo erit $p = t$ et $q = \frac{1}{t}$, unde fit $\partial p = \partial t$ et $\partial q = -\frac{\partial t}{tt}$. Cum ergo ſit $\frac{q}{p} = \frac{1}{tt}$, erit

$$\frac{p\,\partial q - q\,\partial p}{pp} = -\frac{2\,\partial t}{t^3},$$

unde per $pp = tt$ multiplicando fit

$$p\,\partial q - q\,\partial p = -\frac{2\,\partial t}{t};$$

quae formula porro differentiata, ſumendo ∂t conſtans, praebet:

$$p\,\partial\partial q - q\,\partial\partial p = +\frac{2\,\partial t^2}{tt}.$$

Deinde quia eſt $\frac{\partial q}{\partial p} = -\frac{1}{tt}$, fiet

$$\frac{\partial p\,\partial\partial q - \partial q\,\partial\partial p}{\partial p^2} = \frac{2\,\partial t}{t^3},$$

quae aequatio per ∂p^2 multiplicata praebet:

$$\partial p\,\partial\partial q - \partial q\,\partial\partial p = \frac{2\,\partial t^3}{t^3},$$

ex quibus valoribus colligitur formula quaeſita

$$\partial W = -\frac{t\,\partial\partial v}{2\,\partial t} - \frac{1}{2}\,\partial v + \frac{v\,\partial t}{2t}$$

ſiue hunc valorem duplicando et ſigna mutando ſtatui poteſt

$$\partial W = \frac{t\,\partial\partial v}{\partial t} + \partial v - \frac{v\,\partial t}{t}.$$

§. 27. Multiplicemus igitur hanc formam per t vt fiat

$t\,\partial$

Digitized by Google

$$t\partial W = \frac{tt\partial\partial v}{\partial t} + t\partial v - v\partial t,$$

vbi primi membri integratio dat

$$\int t\partial W = \frac{tt\partial v}{\partial t} - \int (t\partial v + v\partial t)$$

ſicque prodit

$$\int t\partial W = \frac{tt\partial v}{\partial t} - tv.$$

Simili modo cum ſit

$$\frac{\partial W}{t} = \frac{\partial\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{t} - \frac{v\partial t}{tt},$$

erit integrando

$$\int \frac{\partial W}{t} = \frac{\partial v}{\partial t} + \int \frac{(t\partial v - v\partial t)}{tt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{t}.$$

Problema ſpeciale 3.

§. 28. *Denotante T functionem quamcunque ipſius t, reſolvere aequationem ſecundi gradus:*

$$\frac{t\partial\partial v}{\partial t} + \partial v - \frac{v\partial t}{t} = T\partial t.$$

Haec reſolutio per praecedentia facile expeditur; primo enim per t multiplicando et integrando prodit

$$\frac{tt\partial v}{\partial t} - tv = \int Tt\partial t.$$

At vero per t diuidendo et integrando fit

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{t} = \int \frac{T\partial t}{t},$$

vnde eliminando terminum $\frac{\partial v}{\partial t}$ oritur

$$v = \tfrac{1}{2} t \int \frac{T\partial t}{t} - \frac{1}{2t} \int Tt\partial t.$$

quae expreſſio quomodo ſatisfaciat, videamus. Primo hinc erit

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \tfrac{1}{2} \int \frac{T\partial t}{t} + \frac{1}{2tt} \int Tt\partial t$$

quae aequatio denuo differentiata dat

$$\frac{\partial\partial v}{\partial t^2} = \frac{T}{t} - \frac{1}{t^3} \int Tt\partial t.$$

His

His igitur valoribus ſubſtitutis prodit

$$\frac{t\,\partial\partial v}{\partial t} = \mathrm{T}\,\partial t - \frac{\partial t}{tt}\int \mathrm{T}\,t\,\partial t$$

$$+\,\partial v = \frac{\partial t}{2}\int\frac{\mathrm{T}\,\partial t}{t} + \frac{\partial t}{2tt}\int \mathrm{T}\,t\,\partial t$$

$$-\frac{v\,\partial t}{t} = -\frac{\partial t}{2}\int\frac{\mathrm{T}\,\partial t}{t} + \frac{\partial t}{2tt}\int \mathrm{T}\,t\,\partial t$$

Summa $= \mathrm{T}\,\partial t$, prorſus vt ante.

Scholion.

§. 29. Duo priora exempla, quae hic attulimus, inſignem vſum praeſtant in curuarum indole reſpectu rectificationis exploranda, vti oſtendimus; tertium autem exemplum ideo eſt notatu dignum, quod in huiusmodi inueſtigationibus ſaepius eiusmodi formulae differentiales occurrunt, quas, per eandem quantitatem tam multiplicatas quam diuiſas, reddi oportet integrabiles. Veluti ſi in ſuperficie cylindri recti praeter rectas axi parallelas aliae lineae duci debeant, quae ſint rectificabiles, quaeſtio ad inuentionem eiusmodi quantitatis algebraicae t reducitur, per quam iſta formula differentialis $\frac{\partial v}{\sqrt{(1-vv)}}$ tam multiplicata quam diuiſa integrationem admittat. Poſtquam autem plurimum nequicquam in hoc negotio deſudaſſem, aſſeuerare non dubito, nullam plane dari eiusmodi quantitatem t, qua hae duae formulae: $\frac{t\,\partial v}{\sqrt{(1-vv)}}$ et $\frac{\partial v}{t\sqrt{(1-vv)}}$ ſimul fiant integrabiles. Praeterea vero omnino certum mihi videtur, praeter ſimplices poteſtates ipſius v nullas alias eius functiones t dari, unde hae duae formulae differentiales: $\frac{t\,\partial v}{v}$ et $\frac{\partial v}{t\,v}$ ſimul euadant integrabiles.

Problema.

§. 30. *Si formula differentialis ∂W vtcunque fuerit compoſita ex quantitatibus variabilibus p et q. (inter quas quidem cer-*

Digitized by Google

ta relatio dari aſſumitur) definire quantitatem v ex hac aequatione differentiali ſecundi gradus:

$$\partial W = \frac{\partial\partial v(p\partial q - q\partial p) - \partial v(p\partial\partial q - q\partial\partial p) + v(\partial p\partial\partial q - \partial q\partial\partial p)}{(p\partial q - q\partial p)^2}.$$

Solutio.

Quia nouimus hanc aequationem integrabilem reddi, ſi multiplicetur tam per p quam per q: haec duplex integratio nobis duas ſuppeditat aequationes differentiales primi gradus, quae ſunt:

$$\int p\,\partial W = \frac{p\partial v - v\partial p}{p\partial q - q\partial p} \text{ et} \int q\,\partial W = \frac{q\partial v - v\partial q}{p\partial q - q\partial p},$$

quarum poſterior, ducta in p, ſi ſubtrahatur a priore ducta in q, praebet ſequentem aequationem: $q\int p\,\partial W - p\int q\,\partial W = v$; ſicque innoteſcit valor quaeſitus quantitatis v, qui, quoniam geminam integrationem inuoluit, ob duplicem conſtantem arbitrariam pro integrali completo aequationis differentio-differentialis eſt habendus.

Problema 2.

Inuenire formulam differentialem ∂W, quae per tres quantitates variabiles datas p, q et r multiplicata fiat integrabilis.

Solutio.

§. 31. Ponamus haec tria integralia, quae prodire debent, eſſe

$$1^\circ.\int p\,\partial W = P,\quad 2^\circ.\int q\,\partial W = Q,\quad 3^\circ.\int r\,\partial W = R,$$

vnde triplici modo formula differentialis quaeſita ∂W exprimetur

$$1^\circ.\ \partial W = \frac{\partial P}{p};\quad 2^\circ.\ \partial W = \frac{\partial Q}{q};\ \text{et}\quad 3^\circ.\ \partial W = \frac{\partial R}{r}$$

§. 32. Jam ſupra §. 14. vidimus duabus prioribus conditionibus, quibus requiritur vt ſit $\frac{\partial P}{\partial Q} = \frac{p}{q}$, ſatisfieri, ſi capiatur

P

$$P = \frac{p\partial v - v\partial p}{p\partial q - q\partial p} \text{ et } Q = \frac{q\partial v - v\partial q}{p\partial q - q\partial p}.$$

Simili modo conditionibus primae et tertiae, qua requiritur vt ſit $\frac{\partial P}{\partial R} = \frac{p}{r}$, ſatisfiet, loco v aliam quantitatem u ſcribendo, his duobus valoribus:

$$P = \frac{p\partial u - u\partial p}{p\partial r - r\partial p} \text{ et } R = \frac{r\partial u - u\partial r}{p\partial r - r\partial p}.$$

Nunc igitur totum negotium eo eſt reductum, vt ambo valores pro P inventi ad aequalitatem perducantur; vbi ergo quaeritur, quales quantitates pro v et u accipi debeant, vt iſtae duae formulae pro P inuentae inter ſe euadant aequales, quippe quo facto ſimul etiam bini reliqui valores Q et R innoteſcent.

§. 33. Cum igitur debeat eſſe

$$\frac{p\partial v - v\partial p}{p\partial q - q\partial p} = \frac{p\partial u - u\partial p}{p\partial r - r\partial p},$$

quo hoc facilius effici poſſit, ſtatuamus $v = Vp$ et $u = Up$, et conditio adimplenda erit

$$\frac{\partial V}{p\partial q - q\partial p} = \frac{\partial U}{p\partial r - r\partial p}, \text{ ideoque } \frac{\partial V}{\partial U} = \frac{p\partial q - q\partial p}{p\partial r - r\partial p}.$$

Quare ſi theorema ſupra §. 14. datum in ſubſidium vocemus, loco P et Q nunc habemus V et U, at vero loco p et q nunc habemus $p\partial q - q\partial p$ et $p\partial r - r\partial p$, ideoque loco v introducendo quantitatem Z haec conditio adimplebitur, ſi ſtatuamus:

$$V = \frac{(p\partial q - q\partial p)\partial Z - Z(p\partial\partial q - q\partial\partial p)}{(p\partial q - q\partial p)(p\partial\partial r - r\partial\partial p) - (p\partial r - r\partial p)(p\partial\partial q - q\partial\partial p)};$$

$$U = \frac{(p\partial r - r\partial p)\partial Z - Z(p\partial\partial r - r\partial\partial p)}{(p\partial q - q\partial p)(p\partial\partial r - r\partial\partial p) - (p\partial r - r\partial p)(p\partial\partial q - q\partial\partial p)};$$

vbi notetur denominatorem reuocari poſſe ad ſequentem formam ſatis concinnam:

$$p\partial\partial p(q\partial r - r\partial q) + p\partial\partial q(r\partial p - p\partial r) + p\partial\partial r(p\partial q - q\partial p)$$

in qua praeter factorem communem p ternae litterae p, q et r ſunt inter ſe permutabiles.

§. 34. Solutio ergo noſtri problematis ſequenti modo abſoluetur:

1°. Sumta pro lubitu quantitate quacunque variabili Z, quaeratur quantitas V, vt ſit

$$Vp = \frac{(p\partial q - q\partial p)\partial Z - Z(p\partial\partial q - q\partial\partial p)}{\partial\partial p(q\partial r - r\partial q) + \partial\partial q(r\partial p - p\partial r) + \partial\partial r(p\partial q - q\partial p)}$$

qui ſimul eſt valor litterae v.

2°. Eodem modo colligatur valor

$$Up = \frac{(p\partial r - r\partial p)\partial Z - Z(p\partial\partial r - r\partial\partial p)}{\partial\partial p(q\partial r - r\partial q) + \partial\partial q(r\partial p - p\partial r) + \partial\partial r(p\partial q - q\partial p)}$$

qui ſimul eſt valor ipſius u.

3°. Inuentis autem his valoribus pro v et u formentur porro iſti valores:

$$P = \frac{p\partial v - v\partial p}{p\partial q - q\partial p}, \text{ vel etiam } P = \frac{p\partial u - u\partial p}{p\partial r - r\partial p}$$

quippe qui ambo valores ad aequalitatem ſunt perducti; praeterea vero ſumatur

$$Q = \frac{q\partial v - v\partial q}{p\partial q - q\partial p} \text{ et } R = \frac{r\partial u - u\partial r}{p\partial r - r\partial p}.$$

4°. Denique hae ternae formulae $\frac{\partial P}{p}$, $\frac{\partial Q}{q}$, $\frac{\partial R}{r}$ producent expreſſiones inter ſe prorſus aequales, atque adeo valorem formulae differentialis quaeſitae ∂W.

§. 35. Solutio haec adhuc magis contrahi poteſt, ſi, poſitis vt ante $v = Vp$ et $u = Up$, inſuper ſtatuatur $q = px$ et $r = py$, vbi quia q et r tanquam functiones ipſius p ſpectari poſſunt, etiam x et y erunt functiones cognitae ipſius p; tum autem fiet $\frac{\partial V}{\partial U} = \frac{\partial x}{\partial y}$. Quare cum x et y ſint functiones ipſius p, ponatur $\partial x = X\partial p$ et $\partial y = Y\partial p$, ita vt etiam X et Y futurae ſint functiones cognitae ipſius p, hinc autem habebimus hanc aequationem reſolvendam $\frac{\partial V}{\partial U} = \frac{X}{Y}$.

§. 36. Nunc igitur introducendo nouam quantitatem variabilem indefinitam Z theorema noſtrum §. 14. nobis dabit

V

Digitized by Google

$$V = \frac{X \partial Z - Z \partial X}{X \partial Y - Y \partial X} \text{ et } U = \frac{Y \partial Z - Z \partial Y}{X \partial Y - Y \partial X}.$$

Inuentis autem valoribus V et U ſimul habentur litterae $v = V p$ et $u = U p$, ex quibus vt ante determinabuntur valores P, Q et R, hincque tandem ipſa formula differentialis quaeſita ∂W.

Corollarium.

§. 37. Quoniam litterae V et U duabus conſtant partibus, altera per Z, altera vero per ∂Z affecta, etiam quantitates v et u duabus huiusmodi partibus conſtabunt; unde earum differentialia inſuper partem ſecundo differentiali $\partial \partial Z$ affectam continebunt. Huiusmodi ergo tres partes in litteris P, Q et R occurrent, quae cum denuo differentiari debeant, vt formula differentialis ∂W eliciatur, euidens eſt in expreſſione ∂W differentialia ipſius Z ad tertium gradum aſſurgere, unde pro ∂W huiusmodi prodibit expreſſio:

$$\partial W = A Z + B \partial Z + C \partial \partial Z + D \partial^3 Z$$

vbi litteras A, B, C et D pro formulis per euolutionem valorum ſupra aſſignatorum poſuimus. Quibus praeceptis applicationi ad caſus particulares non immorari eſt opus.

Digitized by Google

QVATVOR THEOREMATA
MAXIME NOTATV DIGNA IN CALCVLO INTEGRALI.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 1 *Iul.* 1776.

Theorema Primum.

§. 1.

Denotante Φ angulum quemcunque variabilem, ſi n ſignificet numerum quemcunque, ſiue integrum, ſiue fractum, ſiue poſitiuum, ſiue negatiuum, tum vero ſtatuatur $\partial s = \partial \Phi (\text{ſin.} \Phi)^{n-1}$, ſequentes formulae integrales omnes algebraice exhiberi poſſunt:

I. $\int \partial s \,\text{ſin.}\,(n+1)\Phi = \frac{\text{ſin.}\,\Phi^n}{n}\,\text{ſin.}\,n\Phi.$

II. $\int \partial s \,\text{ſin.}\,(n+3)\Phi = \frac{\text{ſin.}\,\Phi^n}{n+1}[\text{ſin.}\,(n+2)\Phi + \frac{1}{n}\,\text{ſin.}\,n\Phi].$

III. $\int \partial s \,\text{ſin.}\,(n+5)\Phi = \frac{\text{ſin.}\,\Phi^n}{n+2}[\text{ſin.}\,(n+4)\Phi + \frac{2}{n+1}\,\text{ſin.}\,(n+2)\Phi$
$+ \frac{2}{n+1} \cdot \frac{1}{n}\,\text{ſin.}\,n\Phi].$

IV. $\int \partial s \,\text{ſin.}\,(n+7)\Phi = \frac{\text{ſin.}\,\Phi^n}{n+3}[\text{ſin.}\,(n+6)\Phi + \frac{3}{n+2}\,\text{ſin.}\,(n+4)\Phi$
$+ \frac{3}{n+2} \cdot \frac{2}{n+1}\,\text{ſin.}\,(n+2)\Phi + \frac{3}{n+2} \cdot \frac{2}{n+1} \cdot \frac{1}{n}\,\text{ſin.}\,n\Phi].$

V.

Digitized by Google

V. $\int \partial s \sin.(n+9)\Phi = \frac{\sin.\Phi^n}{n+4}[\sin.(n+8)\Phi + \frac{4}{n+3}\sin.(n+6)\Phi$
$+ \frac{4}{n+3}\cdot\frac{3}{n+2}\sin.(n+4)\Phi + \frac{4}{n+3}\cdot\frac{3}{n+2}\cdot\frac{2}{n+1}\sin.(n+2)\Phi$
$+ \frac{4}{n+3}\cdot\frac{3}{n+2}\cdot\frac{2}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sin.n\Phi]$.

VI. $\int \partial s \sin.(n+11)\Phi = \frac{\sin.\Phi^n}{n+5}[\sin.(n+10)\Phi + \frac{5}{n+4}\sin.(n+8)\Phi$
$+ \frac{5}{n+4}\cdot\frac{4}{n+3}\sin.(n+6)\Phi + \frac{5}{n+4}\cdot\frac{4}{n+3}\cdot\frac{3}{n+2}\sin.(n+4)\Phi$
$+ \frac{5}{n+4}\cdot\frac{4}{n+3}\cdot\frac{3}{n+2}\cdot\frac{2}{n+1}\sin.(n+2)\Phi + \frac{5}{n+4}\cdot\frac{4}{n+3}\cdot\frac{3}{n+2}\cdot\frac{2}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sin.n\Phi]$.
etc. etc.

Vnde ſi i denotet numerum poſitiuum quemcunque, generaliter habebimus

$$\int \partial s \sin.(n+2i+1)\Phi = \frac{\sin.\Phi^n}{n+i}[\sin.(n+2i)\Phi$$
$$+ \frac{i}{n+i-1}.\sin.(n+2i-2)\Phi + \frac{i}{n+i-1}\cdot\frac{i-1}{n+i-2}.\sin.(n+2i-4)\Phi$$
$$+ \frac{i}{n+i-1}\cdot\frac{i-1}{n+i-2}\cdot\frac{i-2}{n+i-3}\sin.(n+2i-4)\Phi$$
$$+ \frac{i}{n+i-1}\cdot\frac{i-1}{n+i-2}\cdot\frac{i-2}{n+i-3}\cdot\frac{i-3}{n+i-4}\sin.(n+2i-6)\Phi$$
$$+ \frac{i}{n+i-1}\cdot\frac{i-1}{n+i-2}\cdot\frac{i-2}{n+i-3}\cdot\frac{i-3}{n+i-4}\cdot\frac{i-4}{n+i-5}\sin.(n+2i-8)\Phi].$$
etc. etc.

quae terminorum progreſſio quouis caſu ſponte abrumpitur.

Demonſtratio.

§. 2. Ad veritatem huius theorematis demonſtrandam conſideretur iſta formula: $Z = \sin.\Phi^n \sin.\lambda\Phi$, quae differentiata dat

$$\partial Z = \partial\Phi \sin.\Phi^{n-1}(n \cos.\Phi \sin.\lambda\Phi + \lambda \sin.\Phi \cos.n\Phi).$$

At per reductiones cognitas eſt

coſ.

$$\text{coſ.}\,\phi\ \text{ſin.}\,\lambda\phi = \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,(\lambda-1)\,\phi + \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,(\lambda+1)\,\phi \quad \text{et}$$

$$\text{ſin.}\,\phi\ \text{coſ.}\,\lambda\phi = -\tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,(\lambda-1)\,\phi + \tfrac{1}{2}\,\text{ſin.}\,(\lambda+1)\,\phi,$$

quibus valoribus ſubſtitutis, quoniam poſuimus $\partial\phi\ \text{ſin.}\,\phi^{n-1} = \partial s$, erit

$$2\,\partial Z = \partial s\,[(n-\lambda)\,\text{ſin.}\,(\lambda-1)\,\phi + (n+\lambda)\,\text{ſin.}\,(\lambda+1)\,\phi],$$

vnde denuo per partes integrando deducimus

$$\int\partial s\,\text{ſin.}\,(\lambda+1)\,\phi = \frac{2Z}{\lambda+n} + \frac{\lambda-n}{\lambda+n}\int\partial s\,\text{ſin.}\,(\lambda-1)\,\phi, \text{ ſiue}$$

$$\int\partial s\,\text{ſin.}\,(\lambda+1)\,\phi = \frac{2\,\text{ſin.}\,\phi^n\,\text{ſin.}\,\lambda\phi}{\lambda+n} + \frac{\lambda-n}{\lambda+n}\int\partial s\,\text{ſin.}\,(\lambda-1)\,\phi.$$

§. 3. Stabilita igitur hac poſtrema reductione generali capiamus $\lambda = n$, vt adipiſcamur iſtam integrationem abſolutam:

$$\int\partial s\,\text{ſin.}\,(n+1)\,\phi = \frac{1}{n}\,\text{ſin.}\,\phi^n\,\text{ſin.}\,n\phi.$$

Nunc vero ſtatuamus $\lambda = n+2$, et forma illa generalis dabit

$$\int\partial s\,\text{ſin.}\,(n+3)\,\phi = \frac{1}{n+1}\,\text{ſin.}\,\phi^n\,\text{ſin.}\,(n+2)\,\phi$$
$$+ \frac{1}{n+1}\int\partial s\,\text{ſin.}\,(n+1)\,\phi,$$

ſicque haec integratio ad praecedentem eſt reducta. Jam ponamus $\lambda = n+4$, et forma generalis ſuppeditabit

$$\int\partial s\,\text{ſin.}\,(n+5)\,\phi = \frac{1}{n+2}\,\text{ſin.}\,\phi^n\,\text{ſin.}\,(n+4)\,\phi$$
$$+ \frac{2}{n+2}\int\partial s\,\text{ſin.}\,(n+3)\,\phi,$$

quae ergo integratio iterum ad praecedentem eſt reducta. Sit porro $\lambda = n+6$, et ex forma generali prodibit

$$\int\partial s\,\text{ſin.}\,(n+7)\,\phi = \frac{1}{n+3}\,\text{ſin.}\,\phi^n\,\text{ſin.}\,(n+6)\,\phi$$
$$+ \frac{3}{n+3}\int\partial s\,\text{ſin.}\,(n+5)\,\phi$$

ſicque augendis continuo valoribus ipſius λ binario, vlterius progredi licebit.

§. 4. Quodſi iam ſingulos valores integrales antecedentes in ſequentibus ſubſtituamus, ſequentes orientur integrationes abſolutae:

I.

Digitized by Google

I. $\int \partial s\, \text{ſin.}\, (n+1)\, \Phi = \frac{\text{ſin.}\, \Phi^n}{n}\, \text{ſin.}\, n\, \Phi.$

II. $\int \partial s\, \text{ſin.}\, (n+3)\, \Phi = \frac{\text{ſin.}\, \Phi^n}{n+1}\, [\text{ſin.}\, (n+2)\, \Phi + \frac{1}{n}\, \text{ſin.}\, n\, \Phi].$

III. $\int \partial s\, \text{ſin.}\, (n+5)\, \Phi = \frac{\text{ſin.}\, \Phi^n}{n+2}\, [\text{ſin.}\, (n+4)\, \Phi$

$+ \frac{2}{n+1}\, \text{ſin.}\, (n+2)\, \Phi + \frac{2}{n+1} \cdot \frac{1}{n}\, \text{ſin.}\, n\, \Phi].$

IV. $\int \partial s\, \text{ſin.}\, (n+7)\, \Phi = \frac{\text{ſin.}\, \Phi^n}{n+3}\, [\text{ſin.}\, (n+6)\, \Phi + \frac{3}{n+2}\, \text{ſin.}\, (n+4)\, \Phi$

$+ \frac{3}{n+2} \cdot \frac{2}{n+1}\, \text{ſin.}\, (n+2)\, \Phi + \frac{3}{n+2} \cdot \frac{2}{n+1} \cdot \frac{1}{n}\, \text{ſin.}\, n\, \Phi].$

quae cum ſint eae ipſae formulae, quas in theoremate annunciauimus, eius veritas ſufficienter eſt euicta.

Theorema ſecundum.

§. 5. Denotante Φ angulum quemcunque variabilem, ſi n denotet numerum quemcunque, ac breuitatis gratia ponatur vt ante $\partial s = \partial \Phi\, \text{ſin.}\, \Phi^{n-1}$, etiam omnes ſequentes integrationes per algebraicos valores exhiberi poſſunt:

I. $\int \partial s\, \text{coſ.}\, (n+1)\, \Phi = \frac{\text{ſin.}\, \Phi^n}{n}\, \text{coſ.}\, n\, \Phi.$

II. $\int \partial s\, \text{coſ.}\, (n+3)\, \Phi = \frac{\text{ſin.}\, \Phi^n}{n+1}\, [\text{coſ.}\, (n+2)\, \Phi + \frac{1}{n}\, \text{coſ.}\, n\, \Phi].$

III. $\int \partial s\, \text{coſ.}\, (n+5)\, \Phi = \frac{\text{ſin.}\, \Phi^n}{n+2}\, [\text{coſ.}\, (n+4)\, \Phi$

$+ \frac{2}{n+1}\, \text{coſ.}\, (n+2)\, \Phi + \frac{2}{n+1} \cdot \frac{1}{n}\, \text{coſ.}\, n\, \Phi].$

IV. $\int \partial s\, \text{coſ.}\, (n+7)\, \Phi = \frac{\text{ſin.}\, \Phi^n}{n+6}\, [\text{coſ.}\, (n+6)\, \Phi + \frac{3}{n+2}\, \text{coſ.}\, (n+4)\, \Phi$

$+ \frac{3}{n+2} \cdot \frac{2}{n+1}\, \text{coſ.}\, (n+2)\, \Phi + \frac{3}{n+2} \cdot \frac{2}{n+1} \cdot \frac{1}{n}\, \text{coſ.}\, n\, \Phi].$

V. $\int \partial s \cos.(n+9)\Phi = \frac{\sin.\Phi^n}{n+4}\left[\cos.(n+8)\Phi + \frac{4}{n+3}\cos.(n+6)\Phi\right.$

$+ \frac{4}{n+3}\cdot\frac{3}{n+2}\cos.(n+4)\Phi + \frac{4}{n+3}\cdot\frac{3}{n+2}\cdot\frac{2}{n+1}\cos.(n+2)\Phi$

$\left.+ \frac{4}{n+3}\cdot\frac{3}{n+2}\cdot\frac{2}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\cos.n\Phi\right].$

VI. $\int \partial s \cos.(n+11)\Phi = \frac{\sin.\Phi^n}{n+5}\left[\cos.(n+10)\Phi + \frac{5}{n+4}\cos.(n+8)\Phi\right.$

$+ \frac{5}{n+4}\cdot\frac{4}{n+3}\cos.(n+6)\Phi + \frac{5}{n+4}\cdot\frac{4}{n+3}\cdot\frac{3}{n+2}\cos.(n+4)\Phi$

$\left.+ \frac{5}{n+4}\cdot\frac{4}{n+3}\cdot\frac{3}{n+2}\cdot\frac{2}{n+1}\cos.(n+2)\Phi + \frac{5}{n+4}\cdot\frac{4}{n+3}\cdot\frac{3}{n+2}\cdot\frac{2}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\cos.n\Phi\right].$

etc. etc.

Vnde patet, ſi i denotet numerum poſitiuum quemcunque, fore in genere

$\int \partial s \cos.(n+2i+1)\Phi = \frac{\sin.\Phi^n}{n+2}\left[\cos.(n+2i)\Phi\right.$

$+ \frac{i}{n+i-1}\cos.(n+2i-2)\Phi + \frac{i}{n+i-1}\cdot\frac{i-1}{n+i-2}\cos.(n+2i-4)\Phi$

$\left.+ \frac{i}{n+i-1}\cdot\frac{i-1}{n+i-2}\cdot\frac{i-2}{n+i-3}\cos.(n+2i-6)\Phi\right].$

etc. etc.

quos terminos quouis caſu eo vsque continuari oportet, donec ſponte euaneſcant.

Demonſtratio.

§. 6. Ad veritatem horum integralium demonſtrandam conſideretur iſta formula: $Z = \sin.\Phi^n \cos.\lambda\Phi$, cuius differentiatio praebet

$$\partial Z = \partial\Phi \sin.\Phi^{n-1}(n\cos.\Phi\cos.\lambda\Phi - \lambda\sin.\Phi\sin.\lambda\Phi),$$

quae expreſſio, ob

$\cos.\Phi\cos.\lambda\Phi = \frac{1}{2}\cos.(\lambda-1)\Phi + \frac{1}{2}\cos.(\lambda+1)\Phi$ et

$\sin.\Phi\sin.\lambda\Phi = \frac{1}{2}\cos.(\lambda-1)\Phi - \frac{1}{2}\cos.(\lambda+1)\Phi$

ſi

ſi loco $\partial \Phi \text{ſin.} \Phi^{n-1}$ valorem aſſumtum ∂s ſcribamus, fiet

$$2 \partial Z = \partial s [(n-\lambda) \text{coſ.} (\lambda-1) \Phi + (n+\lambda) \text{coſ.} (\lambda+1) \Phi],$$

vnde iterum per partes integrando erit

$$2 \text{ſin.} \Phi^n \text{coſ.} \lambda \Phi = (n-\lambda) \int \partial s \text{coſ.} (\lambda-1) \Phi + (n+\lambda) \int \partial s \text{coſ.} (\lambda+1) \Phi,$$

atque hinc deducimus ſequentem reductionem generalem:

$$\int \partial s \text{coſ.} (\lambda+1) \Phi = \frac{2}{\lambda+n} \text{ſin.} \Phi^n \text{coſ.} \lambda \Phi + \frac{\lambda-n}{\lambda+n} \int \partial s \text{coſ.} (\lambda-1) \Phi.$$

§. 7. Ponamus igitur primo $\lambda = n$, vt obtineamus hanc integrationem abſolutam:

$$\int \partial s \text{coſ.} (n+1) \Phi = \frac{1}{n} \text{ſin.} \Phi^n \text{coſ.} n \Phi.$$

Fiat iam $\lambda = n + 2$, et forma generalis dabit

$$\int \partial s \text{coſ.} (n+3) \Phi = \frac{1}{n+1} \text{ſin.} \Phi^n \text{coſ.} (n+2) \Phi + \frac{1}{n+1} \int \partial s \text{coſ.} (n+1) \Phi.$$

Statuatur porro $\lambda = n + 4$, et conſequemur

$$\int \partial s \text{coſ.} (n+5) \Phi = \frac{1}{n+2} \text{ſin.} \Phi^n \text{coſ.} (n+4) \Phi + \frac{2}{n+2} \int \partial s \text{coſ.} (n+3) \Phi.$$

Ponamus vlterius $\lambda = n + 6$, ac reperiemus

$$\int \partial s \text{coſ.} (n+7) \Phi = \frac{1}{n+3} \text{ſin.} \Phi^n \text{coſ.} (n+6) \Phi + \frac{3}{n+3} \int \partial s \text{coſ.} (n+5) \Phi.$$

Faciamus ſimili modo vlterius $\lambda = n + 8$, ac nanciſcemur

$$\int \partial s \text{coſ.} (n+9) \Phi = \frac{1}{n+4} \text{ſin.} \Phi^n \text{coſ.} (n+8) \Phi + \frac{4}{n+4} \int \partial s \text{coſ.} (n+7) \Phi.$$

etc. etc.

§. 8. Quodſi iam ſingulos valores integrales praecedentes in ſequentes introducamus, perueniemus ad iſtas integrationes abſolutas:

I. $\int \partial s \text{coſ.} (n+1) \Phi = \frac{1}{n} \text{ſin.} \Phi^n \text{coſ.} n \Phi.$

II. $\int \partial s \text{coſ.} (n+3) \Phi = \frac{1}{n+1} \text{ſin.} \Phi^n [\text{coſ.} (n+2) \Phi + \frac{1}{n} \text{coſ.} n \Phi].$

III. $\int \partial s \text{coſ.} (n+5) \Phi = \frac{1}{n+2} \text{ſin.} \Phi^n [\text{coſ.} (n+4) \Phi$

$+ \frac{2}{n+1} \text{coſ.} (n+2) \Phi + \frac{2}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \text{coſ.} n \Phi].$

IV. $\int \partial s\, \text{coſ.}\,(n+7)\Phi = \frac{1}{n+3}\,\text{ſin.}\,\Phi^n\, [\text{coſ.}\,(n+6)\Phi$
$+ \frac{3}{n+2}\,\text{coſ.}\,(n+4)\Phi + \frac{3}{n+2}\cdot\frac{2}{n+1}\,\text{coſ.}\,(n+2)\Phi$
$+ \frac{3}{n+2}\cdot\frac{2}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\,\text{coſ.}\,n\Phi].$

etc. etc.

quae manifeſto ſunt eae ipſae formulae, quas in theoremate produximus, quarum ergo veritas nunc ſolide eſt demonſtrata.

Corollarium.

§. 9. Haec duo theoremata combinata inſeruire poſſunt ad innumerabiles curuas algebraicas inueniendas, quarum arcus indefiniti s omnes per eandem formulam integralem $\int \partial\Phi\, \text{ſin.}\,\Phi^{n-1}$ exprimantur. Cum enim elementum curuae ſit $\partial s = \partial\Phi\, \text{ſin.}\,\Phi^{n-1}$, omnes plane curuae huic conditioni ſatisfacientes ita generaliter exhiberi poſſunt, vt earum coordinatae ſint $x = \int \partial s\, \text{coſ.}\,\omega$ et $y = \int \partial s\, \text{ſin.}\,\omega$. Nunc autem videmus ambas iſtas expreſſiones reuera fore algebraicas, ſi angulus ω ita accipiatur, vt ſit $\omega = (n + 2i + 1)\Phi$, vbi loco i numerum quemcunque integrum poſitiuum accipere licet. Quamobrem numerum talium curuarum algebraicarum in infinitum augere licebit: curua autem ſimpliciſſima ſine dubio prodibit, ponendo $i = 0$. Hoc argumentum iam nuper fuſius pertractavimus.

Theorema tertium.

§. 10. Denotante Φ angulum quemcunque variabilem, ſi n ſignificet numerum quemcunque ſiue integrum, ſiue fractum, ſiue poſitiuum, ſiue negatiuum, tum vero ſtatuatur $\partial s = \partial\Phi\, \text{coſ.}\,\Phi^{n-1}$, ſequentes formulae integrales omnes algebraice exhiberi poſſunt:

I. $\int \partial s\, \text{coſ.}\,(n+1)\Phi = \frac{1}{n}\,\text{coſ.}\,\Phi^n\, \text{ſin.}\,n\Phi.$

II. $\int \partial s\, \text{coſ.}\,(n+3)\Phi = \frac{1}{n+1}\,\text{coſ.}\,\Phi^n\, [\text{ſin.}\,(n+2)\Phi - \frac{1}{n}\,\text{ſin.}\,n\Phi].$

III.

Digitized by Google

III. $\int \partial s \operatorname{coſ.} (n+5)\Phi = \frac{1}{n+2} \operatorname{coſ.} \Phi^n [\operatorname{ſin.} (n+4)\Phi$

$- \frac{2}{n+1} \operatorname{ſin.} (n+2)\Phi + \frac{2}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \operatorname{ſin.} n\Phi].$

IV. $\int \partial s \operatorname{coſ.} (n+7)\Phi = \frac{1}{n+3} \operatorname{coſ.} \Phi^n [\operatorname{ſin.} (n+6)\Phi$

$- \frac{3}{n+2} \operatorname{ſin.} (n+4)\Phi + \frac{3}{n+2} \cdot \frac{2}{n+1} \operatorname{ſin.} (n+2)\Phi$

$- \frac{3}{n+2} \cdot \frac{2}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \operatorname{ſin.} n\Phi].$

V. $\int \partial s \operatorname{coſ.} (n+9)\Phi = \frac{1}{n+4} \operatorname{coſ.} \Phi^n [\operatorname{ſin.} (n+8)\Phi$

$- \frac{4}{n+3} \operatorname{ſin.} (n+6)\Phi + \frac{4}{n+3} \cdot \frac{3}{n+2} \operatorname{ſin.} (n+4)\Phi$

$- \frac{4}{n+3} \cdot \frac{3}{n+2} \cdot \frac{2}{n+1} \operatorname{ſin.} (n+2)\Phi + \frac{4}{n+3} \cdot \frac{3}{n+2} \cdot \frac{2}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \operatorname{ſin.} n\Phi].$

VI. $\int \partial s \operatorname{coſ.} (n+11)\Phi = \frac{1}{n+5} \operatorname{coſ.} \Phi^n [\operatorname{ſin.} (n+10)\Phi$

$- \frac{5}{n+4} \operatorname{ſin.} (n+8)\Phi + \frac{5}{n+4} \cdot \frac{4}{n+3} \operatorname{ſin.} (n+6)\Phi$

$- \frac{5}{n+4} \cdot \frac{4}{n+3} \cdot \frac{3}{n+2} \operatorname{ſin.} (n+4)\Phi + \frac{5}{n+4} \cdot \frac{4}{n+3} \cdot \frac{3}{n+2} \cdot \frac{2}{n+1} \operatorname{ſin.} (n+2)\Phi$

$- \frac{5}{n+4} \cdot \frac{4}{n+3} \cdot \frac{3}{n+2} \cdot \frac{2}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \operatorname{ſin.} n\Phi].$

Ex quibus concluditur fore generaliter, denotante i numerum integrum poſitiuum quemcunque:

$$\int \partial s \operatorname{coſ.} (n+2i+1)\Phi = \frac{1}{n+i} \operatorname{coſ.} \Phi^n [\operatorname{ſin.} (n+2i)\Phi$$

$$- \frac{i}{n+i-1} \operatorname{ſin.} (n+2i-2)\Phi + \frac{i}{n+i-1} \cdot \frac{i-1}{n+i-2} \operatorname{ſin.} (n+2i-4)\Phi$$

$$- \frac{i}{n+i-1} \cdot \frac{i-1}{n+i-2} \cdot \frac{i-2}{n+i-3} \operatorname{ſin.} (n+2i-6)\Phi + \text{etc.}]$$

Demonſtratio.

§. 11. Ad veritatem huius theorematis demonſtrandam conſideretur iſta formula: $Z = \operatorname{coſ.} \Phi^n \operatorname{ſin.} \lambda\Phi$, quae differentiata dat

$$\partial Z = \partial\Phi \operatorname{coſ.} \Phi^{n-1} (-n \operatorname{ſin.} \Phi \operatorname{ſin.} \lambda\Phi + \lambda \operatorname{coſ.} \Phi \operatorname{coſ.} \lambda\Phi),$$

quae per reductiones ante adhibitas transformatur in hanc formam:

$$2\partial Z = \partial s [(\lambda - n) \operatorname{coſ.} (\lambda - 1)\Phi + (\lambda + n) \operatorname{coſ.} (\lambda + 1)\Phi]$$

 vnde

vnde iterum per partes integrando nanciſcimur

$$2Z=(\lambda-n)\int\partial s\,\text{coſ.}\,(\lambda-1)\Phi+(\lambda+n)\int\partial s\,\text{coſ.}\,(\lambda+1)\,\Phi,$$

hincque deducimus iſtam integrationem generalem:

$$\int\partial s\,\text{coſ.}\,(\lambda+1)\,\Phi=\tfrac{2}{\lambda+n}\,\text{coſ.}\,\Phi^n\,\text{ſin.}\,\lambda\Phi-\tfrac{(\lambda-n)}{\lambda+n}\int\partial s\,\text{coſ.}(\lambda-1)\,\Phi.$$

§. 12. Sumamus nunc primo $\lambda=n$, vt poſterius integrale tollatur, ac prodibit

$$\int\partial s\,\text{coſ.}\,(n+1)\,\Phi=\tfrac{1}{n}\,\text{coſ.}\,\Phi^n\,\text{ſin.}\,n\,\Phi.$$

Nunc autem porro ponamus $\lambda=n+2$, et forma noſtra generalis nobis praebebit

$$\int\partial s\,\text{coſ.}\,(n+3)\,\Phi=\tfrac{1}{n+1}\,\text{coſ.}\,\Phi^n\,\text{ſin.}\,(n+2)\,\Phi-\tfrac{1}{n+1}\int\partial s\,\text{coſ.}\,(n+1)\,\Phi,$$

vbi ergo poſterius integrale iam eſt inuentum. Fiat vlterius $\lambda=n+4$, et habebimus

$$\int\partial s\,\text{coſ.}\,(n+5)\,\Phi=\tfrac{1}{n+2}\,\text{coſ.}\,\Phi^n\,\text{ſin.}\,(n+4)\,\Phi-\tfrac{2}{n+2}\int\partial s\,\text{coſ.}\,(n+3)\,\Phi,$$

quod poſtremum integrale itidem iam patet. Sumamus nunc $\lambda=n+6$, et forma generalis dabit

$$\int\partial s\,\text{coſ.}\,(n+7)\,\Phi=\tfrac{1}{n+3}\,\text{coſ.}\,\Phi^n\,\text{ſin.}\,(n+6)\,\Phi-\tfrac{3}{n+3}\int\partial s\,\text{coſ.}\,(n+5)\,\Phi.$$

Simili modo ſi faciamus $\lambda=n+8$, obtinebimus

$$\int\partial s\,\text{coſ.}\,(n+9)\,\Phi=\tfrac{1}{n+4}\,\text{coſ.}\,\Phi^n\,\text{ſin.}\,(n+8)\,\Phi-\tfrac{4}{n+4}\int\partial s\,\text{coſ.}\,(n+7)\,\Phi.$$

Hocque modo vlterius progrediendo, perpetuo ſequentia integralia per praecedentia exprimere licebit.

§. 13. Quodſi ergo valores integrales praecedentes in ſequentibus ſubſtituamus, conſequemur iſtas integrationes abſolutas:

$$\text{I.}\quad\int\partial s\,\text{coſ.}\,(n+1)\,\Phi=\tfrac{1}{n}\,\text{coſ.}\,\Phi^n\,\text{ſin.}\,n\,\Phi.$$

$$\text{II.}\quad\int\partial s\,\text{coſ.}\,(n+3)\,\Phi=\tfrac{1}{n+1}\,\text{coſ.}\,\Phi^n\,[\text{ſin.}\,(n+2)\,\Phi-\tfrac{1}{n}\,\text{ſin.}\,n\,\Phi].$$

$$\text{III.}\quad\int\partial s\,\text{coſ.}\,(n+5)\,\Phi=\tfrac{1}{n+2}\,\text{coſ.}\,\Phi^n\,[\text{ſin.}\,(n+4)\,\Phi$$
$$-\tfrac{2}{n+1}\,\text{ſin.}\,(n+2)\,\Phi+\tfrac{2}{n+1}\cdot\tfrac{1}{n}\,\text{ſin.}\,n\,\Phi].$$

Digitized by Google

$$\text{IV. } \int \partial s \,\text{coſ.}\, (n+7)\Phi = \tfrac{1}{n+3}\,\text{coſ.}\,\Phi^n \,[\text{ſin.}\,(n+6)\Phi$$
$$- \tfrac{3}{n+2}\,\text{ſin.}\,(n+4)\Phi + \tfrac{3}{n+2}\cdot\tfrac{2}{n+1}\,\text{ſin.}\,(n+2)\Phi$$
$$- \tfrac{3}{n+2}\cdot\tfrac{2}{n+1}\cdot\tfrac{1}{n}\,\text{ſin.}\,n\Phi].$$

$$\text{V. } \int \partial s \,\text{coſ.}\, (n+9)\Phi = \tfrac{1}{n+4}\,\text{coſ.}\,\Phi^n \,[\text{ſin.}\,(n+8)\Phi$$
$$- \tfrac{4}{n+3}\,\text{ſin.}\,(n+6)\Phi + \tfrac{4}{n+3}\cdot\tfrac{3}{n+2}\,\text{ſin.}\,(n+4)\Phi$$
$$- \tfrac{4}{n+3}\cdot\tfrac{3}{n+2}\cdot\tfrac{2}{n+1}\,\text{ſin.}\,(n+2)\Phi + \tfrac{4}{n+3}\cdot\tfrac{3}{n+2}\cdot\tfrac{2}{n+1}\cdot\tfrac{1}{n}\,\text{ſin.}\,n\Phi].$$

etc. etc.

vnde veritas noſtri theorematis abunde elucet.

Theorema quartum.

§. 14. Denotante Φ angulum quemcunque variabilem, ſi n ſignificet numerum quemcunque, ſiue integrum, ſiue fractum, ſiue poſitiuum, ſiue negatiuum, tum vero ſtatuatur $\partial s = \partial \Phi \,\text{coſ.}\,\Phi^{n-n}$; ſequentes formulae integrales omnes algebraice exprimi poterunt.

$$\text{I. } \int \partial s \,\text{ſin.}\,(n+1)\Phi = -\tfrac{1}{n}\,\text{coſ.}\,\Phi^n\,\text{coſ.}\,n\Phi$$

$$\text{II. } \int \partial s \,\text{ſin.}\,(n+3)\Phi = -\tfrac{1}{n+1}\,\text{coſ.}\,\Phi^n\,[\text{coſ.}\,(n+2)\Phi$$
$$- \tfrac{1}{n}\,\text{coſ.}\,n\Phi].$$

$$\text{III. } \int \partial s \,\text{ſin.}\,(n+5)\Phi = -\tfrac{1}{n+2}\,\text{coſ.}\,\Phi^n\,[\text{coſ.}\,(n+4)\Phi$$
$$- \tfrac{2}{n+1}\,\text{coſ.}\,(n+2)\Phi + \tfrac{2}{n+1}\cdot\tfrac{1}{n}\,\text{coſ.}\,n\Phi].$$

$$\text{IV. } \int \partial s \,\text{ſin.}\,(n+7)\Phi = -\tfrac{1}{n+3}\,\text{coſ.}\,\Phi^n\,[\text{coſ.}\,(n+6)\Phi$$
$$- \tfrac{3}{n+2}\,\text{coſ.}\,(n+4)\Phi + \tfrac{3}{n+2}\cdot\tfrac{2}{n+1}\,\text{coſ.}\,(n+2)\Phi$$
$$- \tfrac{3}{n+2}\cdot\tfrac{2}{n+1}\cdot\tfrac{1}{n}\,\text{coſ.}\,n\Phi].$$

$$\text{V. } \int \partial s \,\text{ſin.}\,(n+9)\Phi = -\tfrac{1}{n+4}\,\text{coſ.}\,\Phi^n\,[\text{coſ.}\,(n+8)\Phi$$
$$- \tfrac{4}{n+3}\,\text{coſ.}\,(n+6)\Phi + \tfrac{4}{n+3}\cdot\tfrac{3}{n+2}\,\text{coſ.}\,(n+4)\Phi$$
$$- \tfrac{4}{n+3}\cdot\tfrac{3}{n+2}\cdot\tfrac{2}{n+1}\,\text{coſ.}\,(n+2)\Phi + \tfrac{4}{n+3}\cdot\tfrac{3}{n+2}\cdot\tfrac{2}{n+1}\cdot\tfrac{1}{n}\,\text{coſ.}\,n\Phi].$$

VI.

vnde iterum per partes integrando nanciſcimur

$$2Z = (\lambda - n)\int \partial s \cos. (\lambda - 1)\Phi + (\lambda + n)\int \partial s \cos. (\lambda + 1)\Phi,$$

hincque deducimus iſtam integrationem generalem:

$$\int \partial s \cos. (\lambda + 1)\Phi = \frac{2}{\lambda + n} \cos. \Phi^n \sin. \lambda\Phi - \frac{(\lambda - n)}{\lambda + n}\int \partial s \cos. (\lambda - 1)\Phi.$$

§. 12. Sumamus nunc primo $\lambda = n$, vt poſterius integrale tollatur, ac prodibit

$$\int \partial s \cos. (n + 1)\Phi = \frac{1}{n} \cos. \Phi^n \sin. n\Phi.$$

Nunc autem porro ponamus $\lambda = n + 2$, et forma noſtra generalis nobis praebebit

$$\int \partial s \cos. (n + 3)\Phi = \frac{1}{n + 1} \cos. \Phi^n \sin. (n + 2)\Phi - \frac{1}{n + 1}\int \partial s \cos. (n + 1)\Phi,$$

vbi ergo poſterius integrale iam eſt inuentum. Fiat vlterius $\lambda = n + 4$, et habebimus

$$\int \partial s \cos. (n + 5)\Phi = \frac{1}{n + 2} \cos. \Phi^n \sin. (n + 4)\Phi - \frac{2}{n + 2}\int \partial s \cos. (n + 3)\Phi,$$

quod poſtremum integrale itidem iam patet. Sumamus nunc $\lambda = n + 6$, et forma generalis dabit

$$\int \partial s \cos. (n + 7)\Phi = \frac{1}{n + 3} \cos. \Phi^n \sin. (n + 6)\Phi - \frac{3}{n + 3}\int \partial s \cos. (n + 5)\Phi.$$

Simili modo ſi faciamus $\lambda = n + 8$, obtinebimus

$$\int \partial s \cos. (n + 9)\Phi = \frac{1}{n + 4} \cos. \Phi^n \sin. (n + 8)\Phi - \frac{4}{n + 4}\int \partial s \cos. (n + 7)\Phi.$$

Hocque modo vlterius progrediendo, perpetuo ſequentia integralia per praecedentia exprimere licebit.

§. 13. Quodſi ergo valores integrales praecedentes in ſequentibus ſubſtituamus, conſequemur iſtas integrationes abſolutas:

I. $\int \partial s \cos. (n + 1)\Phi = \frac{1}{n} \cos. \Phi^n \sin. n\Phi.$

II. $\int \partial s \cos. (n + 3)\Phi = \frac{1}{n + 1} \cos. \Phi^n [\sin. (n + 2)\Phi - \frac{1}{n} \sin. n\Phi].$

III. $\int \partial s \cos. (n + 5)\Phi = \frac{1}{n + 2} \cos. \Phi^n [\sin. (n + 4)\Phi$

$$- \frac{2}{n + 1} \sin. (n + 2)\Phi + \frac{2}{n + 1} \cdot \frac{1}{n} \sin. n\Phi].$$

IV.

IV. $\int \partial s \,\text{coſ.}\, (n+7)\Phi = \frac{1}{n+3}\,\text{coſ.}\,\Phi^n\, [\text{ſin.}\,(n+6)\Phi$
$- \frac{3}{n+2}\,\text{ſin.}\,(n+4)\Phi + \frac{3}{n+2}\cdot\frac{2}{n+1}\,\text{ſin.}\,(n+2)\Phi$
$- \frac{3}{n+2}\cdot\frac{2}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\,\text{ſin.}\,n\Phi].$

V. $\int \partial s \,\text{coſ.}\, (n+9)\Phi = \frac{1}{n+4}\,\text{coſ.}\,\Phi^n\, [\text{ſin.}\,(n+8)\Phi$
$- \frac{4}{n+3}\,\text{ſin.}\,(n+6)\Phi + \frac{4}{n+3}\cdot\frac{3}{n+2}\,\text{ſin.}\,(n+4)\Phi$
$- \frac{4}{n+3}\cdot\frac{3}{n+2}\cdot\frac{2}{n+1}\,\text{ſin.}\,(n+2)\Phi + \frac{4}{n+3}\cdot\frac{3}{n+2}\cdot\frac{2}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\,\text{ſin.}\,n\Phi].$

etc. etc.

vnde veritas noſtri theorematis abunde elucet.

Theorema quartum.

§. 14. Denotante Φ angulum quemcunque variabilem, ſi n ſignificet numerum quemcunque, ſiue integrum, ſiue fractum, ſiue poſitiuum, ſiue negatiuum, tum vero ſtatuatur $\partial s = \partial\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi^{n-n}$; ſequentes formulae integrales omnes algebraice exprimi poterunt.

I. $\int \partial s \,\text{ſin.}\, (n+1)\Phi = -\frac{1}{n}\,\text{coſ.}\,\Phi^n\,\text{coſ.}\,n\Phi$

II. $\int \partial s \,\text{ſin.}\, (n+3)\Phi = -\frac{1}{n+1}\,\text{coſ.}\,\Phi^n\, [\text{coſ.}\,(n+2)\Phi$
$- \frac{1}{n}\,\text{coſ.}\,n\Phi].$

III. $\int \partial s \,\text{ſin.}\, (n+5)\Phi = -\frac{1}{n+2}\,\text{coſ.}\,\Phi^n\, [\text{coſ.}\,(n+4)\Phi$
$- \frac{2}{n+1}\,\text{coſ.}\,(n+2)\Phi + \frac{2}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\,\text{coſ.}\,n\Phi].$

IV. $\int \partial s \,\text{ſin.}\, (n+7)\Phi = -\frac{1}{n+3}\,\text{coſ.}\,\Phi^n\, [\text{coſ.}\,(n+6)\Phi$
$- \frac{3}{n+2}\,\text{coſ.}\,(n+4)\Phi + \frac{3}{n+2}\cdot\frac{2}{n+1}\,\text{coſ.}\,(n+2)\Phi$
$- \frac{3}{n+2}\cdot\frac{2}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\,\text{coſ.}\,n\Phi].$

V. $\int \partial s \,\text{ſin.}\, (n+9)\Phi = -\frac{1}{n+4}\,\text{coſ.}\,\Phi^n\, [\text{coſ.}\,(n+8)\Phi$
$- \frac{4}{n+3}\,\text{coſ.}\,(n+6)\Phi + \frac{4}{n+3}\cdot\frac{3}{n+2}\,\text{coſ.}\,(n+4)\Phi$
$- \frac{4}{n+3}\cdot\frac{3}{n+2}\cdot\frac{2}{n+1}\,\text{coſ.}\,(n+2)\Phi + \frac{4}{n-3}\cdot\frac{3}{n+2}\cdot\frac{2}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\,\text{coſ.}\,n\Phi].$

VI.

VI. $\int \partial s \sin.(n+11)\Phi = -\frac{1}{n+5}\cos.\Phi^n [\cos.(n+10)\Phi$
$- \frac{5}{n+4}\cos.(n+8)\Phi + \frac{5}{n+4}\cdot\frac{4}{n+3}\cos.(n+6)\Phi$
$- \frac{5}{n+4}\cdot\frac{4}{n+3}\cdot\frac{3}{n+2}\cos.(n+4)\Phi$
$+ \frac{5}{n+4}\cdot\frac{4}{n+3}\cdot\frac{3}{n+2}\cdot\frac{2}{n+1}\cos.(n+2)\Phi$
$- \frac{5}{n+4}\cdot\frac{4}{n+3}\cdot\frac{3}{n+2}\cdot\frac{2}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\cos.n\Phi].$

Vnde manifeſto patet, ſi i denotet numerum quemcunque integrum poſitiuum, fore in genere

$\int \partial s \sin.(n+2i+1)\Phi = -\frac{1}{n+i}\cos.\Phi^n [\cos.(n+2i)\Phi$
$- \frac{i}{n+i-1}\cos.(n+2i-2)\Phi$
$+ \frac{i}{n+i-1}\cdot\frac{i-1}{n+i-2}\cos.(n+2i-4)\Phi$
$- \frac{i}{n+i-1}\cdot\frac{i-1}{n+i-2}\cdot\frac{i-2}{n+i-3}\cos.(n+2i-6)\Phi$
$+ \frac{i}{n+i-1}\cdot\frac{i-1}{n+i-2}\cdot\frac{i-2}{n+i-3}\cdot\frac{i-3}{n+i-4}\cos.(n+2i-8)\Phi$ etc.

Demonſtratio.

§. 15. Ad hoc theorema demonſtrandum conſideretur formula $Z = \cos.\Phi^n \cos.\lambda\Phi$, quae differentiata praebet

$$\partial Z = -\partial\Phi \cos.\Phi^{n-1}(n \sin.\Phi\cos.\lambda\Phi + \lambda\cos.\Phi\sin.\lambda\Phi),$$

quae per notas reductiones reducitur ad hanc formam:

$$2\partial Z = -\partial s[(\lambda+n)\sin.(\lambda+1)\Phi + (\lambda-n)\sin.(\lambda-1)\Phi],$$

quae iterum per partes integrata dat

$$2Z = -(\lambda+n)\int\partial s\sin.(\lambda+1)\Phi - (\lambda-n)\int\partial s\sin.(\lambda-1)\Phi,$$

vnde deducitur iſta integratio generalis:

$$\int\partial s\sin.(\lambda+1)\Phi = -\frac{2}{\lambda+n}\cos.\Phi^n\cos.\lambda\Phi - \frac{(\lambda-n)}{\lambda+n}\int\partial s\sin.(\lambda-1)\Phi.$$

§. 16. Vt membrum integrale poſtremum e medio tollatur, capiamus $\lambda = n$ et forma generalis dabit

$$\int\partial s\sin.(n+1)\Phi = -\frac{1}{n}\cos.\Phi^n\cos.n\Phi.$$

Statuamus nunc porro $\lambda = n+2$, ac proueniet

$\int\partial s$

$$\int \partial s \sin.(n+3)\Phi = -\frac{1}{n+1}\cos.\Phi^n \cos.(n+2)\Phi$$
$$-\frac{1}{n+1}\int \partial s \sin.(n+1)\Phi.$$

Fiat porro $\lambda = n+4$, vt oriatur

$$\int \partial s \sin.(n+5)\Phi = -\frac{1}{n+2}\cos.\Phi^n \cos.(n+4)\Phi$$
$$-\frac{2}{n+2}\int \partial s \sin.(n+3)\Phi.$$

Sit iam $\lambda = n+6$, fiet

$$\int \partial s \sin.(n+7)\Phi = -\frac{1}{n+3}\cos.\Phi^n \cos.(n+6)\Phi$$
$$-\frac{3}{n+3}\int \partial s \sin.(n+5)\Phi.$$

Simili modo ſit $\lambda = n+8$, ac reſultabit

$$\int \partial s \sin.(n+9)\Phi = -\frac{1}{n+4}\cos.\Phi^n \cos.(n+8)\Phi$$
$$-\frac{4}{n+4}\int \partial s \sin.(n+7)\Phi.$$

etc. etc.

vbi pariter ſequentia integralia per praecedentia definiuntur.

§. 17. Quamobrem ſi vbique valores integrales praecedentes ſubſtituantur, orientur ſequentes integrationes abſolutae:

I. $\int \partial s \sin.(n+1)\Phi = -\frac{1}{n}\cos.\Phi^n \cos.n\Phi.$

II. $\int \partial s \sin.(n+3)\Phi = -\frac{1}{n+1}\cos.\Phi^n [\cos.(n+2)\Phi$
$-\frac{1}{n}\cos.n\Phi].$

III. $\int \partial s \sin.(n+5)\Phi = -\frac{1}{n+2}\cos.\Phi^n [\cos.(n+4)\Phi$
$-\frac{2}{n+1}\cos.(n+2)\Phi + \frac{2}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\cos.n\Phi].$

IV. $\int \partial s \sin.(n+7)\Phi = -\frac{1}{n+3}\cos.\Phi^n [\cos.(n+6)\Phi$
$-\frac{3}{n+2}\cos.(n+4)\Phi + \frac{3}{n+2}\cdot\frac{2}{n+1}\cos.(n+2)\Phi$
$-\frac{3}{n+2}\cdot\frac{2}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\cos.n\Phi].$

V. $\int \partial s \sin. (n+9) \Phi = -\frac{1}{n+4} \cos. \Phi^n [\cos. (n+8) \Phi$
$- \frac{4}{n+3} \cos. (n+6) \Phi + \frac{4}{n+3} \cdot \frac{3}{n+2} \cos. (n+4) \Phi$
$- \frac{4}{n+3} \cdot \frac{3}{n+2} \cdot \frac{2}{n+1} \cos. (n+2) \Phi$
$+ \frac{4}{n+3} \cdot \frac{3}{n+2} \cdot \frac{2}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \cos. n \Phi]$.
etc. etc.

ſicque veritas theorematis propoſiti ſufficienter eſt euicta.

Corollarium 1.

§. 18. Si $\partial s = \partial \Phi \cos. \Phi^{n-1}$ denotet elementum cuiuspiam lineae curuae, cuius coordinatae orthogonales ſint x et y, ita vt ſit $\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2$, huic conditioni generatim ſatisfiet, ſumendo $\partial x = \partial s \cos. \omega$ et $\partial y = \partial s \sin. \omega$. Nunc igitur ex binis poſterioribus theorematibus patet, innumerabiles huiusmodi curuas algebraicas exhiberi poſſe, ſi ſcilicet capiatur $\omega = (n + 2i + 1) \Phi$, quandoquidem hinc valores ipſarum x et y algebraice exprimi poſſunt; ac ſimpliciſſima quidem curua prodibit ponendo $i = 0$, tum enim fiet

$$x = \int \partial s \cos. (n+1) \Phi = -\frac{1}{n} \cos. \Phi^n \sin. n \Phi \text{ et}$$
$$y = \int \partial s \sin. (n+1) \Phi = -\frac{1}{n} \cos. \Phi^n \cos. n \Phi.$$

Corollarium 2.

§. 19. Quodſi ſumatur $n = 1$, vt fieri debeat $\partial s = \partial \Phi$, ideoque $s = \Phi$, hoc eſt arcui circulari aequalis, tum facile oſtendi poteſt, quicunque valor numero i tribuatur, curuas reſultantes omnes fore circulos, ita vt hoc caſu praeter circulum nulla alia curua algebraica ſatisfaciat, id quod pro caſu $i = 3$ oſtendiſſe ſufficiat. Tum enim erit

$$x = \int \partial s \cos. 8 \Phi = \tfrac{1}{4} \cos. \Phi (\sin. 7 \Phi - \sin. 5 \Phi + \sin. 3 \Phi - \sin. \Phi)$$

quae

quae forma per reductiones abit in hanc: $x = \frac{1}{8}$ ſin. 8Φ. Tum vero habebitur ſimili modo

$$y = \int \partial s \text{ ſin. } 8\Phi = -\tfrac{1}{4} \text{coſ.} \Phi (\text{coſ.} 7\Phi - \text{coſ.} 5\Phi + \text{coſ.} 3\Phi - \text{coſ.} \Phi),$$

quae per ſimiles reductiones praebet

$$y = \tfrac{1}{8}(1 - \text{coſ.} 8\Phi) \text{ ideoque } \tfrac{1}{8} - y = \tfrac{1}{8} \text{coſ.} 8\Phi.$$

Ex his iam valoribus conjunctis manifeſtum eſt fore $xx + (\frac{1}{8} - y)^2 = \frac{1}{64}$, quae vtique eſt aequatio pro circulo. Eodem modo oſtendi poteſt, quicunque valor numero i tribuatur, ſemper quoque circulum eſſe proditurum.

Corollarium 3.

§. 20. Caſus quoque, quo $n = -\frac{1}{2}$, omni attentione eſt dignus, pro quo curua ſimpliciſſima erit

$$x = \int \partial s \text{ coſ.} \tfrac{1}{2}\Phi = \frac{2 \text{ ſin.} \frac{1}{2}\Phi}{\sqrt{\text{coſ.} \Phi}} \text{ et}$$

$$y = \int \partial s \text{ ſin.} \tfrac{1}{2}\Phi = \frac{2 \text{ coſ.} \frac{1}{2}\Phi}{\sqrt{\text{coſ.} \Phi}};$$

ita vt elementum huius curuae futurum ſit $\partial s = \frac{\partial \Phi}{\text{coſ.} \Phi \sqrt{\text{coſ.} \Phi}}$. Iam ad angulum Φ eliminandum, quoniam eſt

$$\text{coſ.} \tfrac{1}{2}\Phi^2 - \text{ſin.} \tfrac{1}{2}\Phi^2 = \text{coſ.} \Phi$$

habebimus $yy - xx = 4$, ſiue $yy = 4 + xx$, quae eſt aequatio pro Hyperbola aequilatera, ſiue rectangula.

Scholion 1.

§. 21. Quanquam autem in his quatuor theorematibus infinitae formulae integrabiles ſunt exhibitae, tamen occurrere poſſunt certi caſus, quibus integralia aſſignata euadunt incongrua, atque adeo naturam quantitatum algebraicarum penitus amittunt. Tales caſus oriuntur, quoties exponens n vel euaneſcit,

Digitized by Google

vel numero integro negatiuo ſit aequalis. Hoc enim caſu fieri poteſt, vt quiſpiam factor in denominatoribus in nihilum abeat, ideoque ipſi termini in infinitum excreſcere videntur. Etiamſi enim hoc incommodum adiectione conſtantium pariter infinitarum euitari poſſet, tamen ipſi termini inde reſultantes non amplius forent algebraici. Ita ſi eſſet $n = 0$, omnia prorſus integralia ibi exhibita penitus tollerentur. Si autem eſſet $n = -1$, tum tantum primae formulae relinquerentur, ſequentes omnes autem euaderent inutiles. Si eſſet $n = -2$, tum binae priores formae tantum ſubſiſtere poſſent; ſolae autem ternae, ſi eſſet $n = -3$, etc. His autem caſibus exceptis, quicunque valores exponenti n tribuantur, ſingula theoremata innumerabiles ſuppeditant formulas integrabiles.

Scholion.

§. 22. Quemadmodum binis prioribus theorematibus iam ſum vſus ad innumerabiles curuas algebraicas inueniendas, quarum longitudo s hoc valore exprimatur: $s = \int \partial \Phi \text{ ſin. } \Phi^{n-1}$; ita etiam bina poſteriora theoremata innumerabilibus curuis algebraicis inueniendis inſeruire poſſunt, quarum longitudo ſit $s = \int \partial \Phi \text{ coſ. } \Phi^{n-1}$. Etiamſi enim hi duo caſus prorſus inter ſe conueniant, ſi quidem, loco Φ ſcribendo $90° - \Phi$, altera formula in alteram transformatur; unde quis ſuſpicari poſſet, duo poſteriora theoremata tuto omitti potuiſſe; tamen hos caſus non tam plane ex prioribus deducere licet, quippe qui veritates per ſe notatu digniſſimas inuoluere ſunt cenſendi. Quin etiam omnia haec quatuor theoremata iunctim ſumpta viam ſternunt ad infinitas curuas algebraicas inueſtigandas, quarum longitudo s formula multo magis complicata exprimatur; ad quod oſtendendum ante oculos exponamus integrationes generales, ad quas ſingula theoremata nos duxerunt.

I.

Digitized by Google

$$\text{I. } \int \partial \Phi \sin. \Phi^{n-1} \sin. (n+2i+1)\Phi = \frac{1}{n+i} \sin. \Phi^{n} [\sin. (n+2i)\Phi$$
$$+ \frac{i}{n+i-1} \sin. (n+2i-2)\Phi + \frac{i}{n+i-1} \cdot \frac{i-1}{n+i-2} \sin. (n+i-4)\Phi$$
$$+ \frac{i}{n+i-1} \cdot \frac{i-1}{n+i-2} \cdot \frac{i-2}{n+i-3} \sin. (n+2i-6)\Phi$$
$$+ \frac{i}{n+i-1} \cdot \frac{i-1}{n+i-2} \cdot \frac{i-2}{n+i-3} \cdot \frac{i-3}{n+i-4} \sin. (n+2i-8)\Phi \text{ etc.}]$$

$$\text{II. } \int \partial \Phi \sin. \Phi^{n-1} \cos. (n+2i+1)\Phi = \frac{1}{n+i} \sin. \Phi^{n} [\cos. (n+2i)\Phi$$
$$+ \frac{i}{n+i-1} \cos. (n+2i-2)\Phi + \frac{i}{n+i-1} \cdot \frac{i-1}{n+i-2} \cos. (n+2i-4)\Phi$$
$$+ \frac{i}{n+i-1} \cdot \frac{i-1}{n+i-2} \cdot \frac{i-2}{n+i-3} \cos. (n+2i-6)\Phi$$
$$+ \frac{i}{n+i-1} \cdot \frac{i-1}{n+i-2} \cdot \frac{i-2}{n+i-3} \cdot \frac{i-3}{n+i-4} \cos. (n+2i-8)\Phi \text{ etc.}]$$

$$\text{III. } \int \partial \Phi \cos. \Phi^{n-1} \cos. (n+2i+1)\Phi = \frac{1}{n+i} \cos. \Phi^{n} [\sin. (n+2i)\Phi$$
$$- \frac{i}{n+i-1} \sin. (n+2i-2)\Phi + \frac{i}{n+i-1} \cdot \frac{i-1}{n+i-2} \sin. (n+2i-4)\Phi$$
$$- \frac{i}{n+i-1} \cdot \frac{i-1}{n+i-2} \cdot \frac{i-2}{n+i-3} \sin. (n+2i-6)\Phi$$
$$+ \frac{i}{n+i-1} \cdot \frac{i-1}{n+i-2} \cdot \frac{i-2}{n+i-3} \cdot \frac{i-3}{n+i-4} \sin. (n+2i-8)\Phi \text{ etc.}]$$

$$\text{IV. } \int \partial \Phi \cos. \Phi^{n-1} \sin. (n+2i+1)\Phi = -\frac{1}{n+i} \cos. \Phi^{n} [\cos (n+2i)\Phi$$
$$- \frac{i}{n+i-1} \cos. (n+2i-2)\Phi + \frac{i}{n+i-1} \cdot \frac{i-1}{n+i-2} \cos. (n+2i-4)\Phi$$
$$- \frac{i}{n+i-1} \cdot \frac{i-1}{n+i-2} \cdot \frac{i-2}{n+i-3} \cos. (n+2i-6)\Phi$$
$$+ \frac{i}{n+i-1} \cdot \frac{i-1}{n+i-2} \cdot \frac{i-2}{n+i-3} \cdot \frac{i-3}{n+i-4} \cos. (n+2i-8)\Phi \text{ etc.}]$$

Problema ſingulare.

Inuenire innumerabiles curuas algebraicas, quarum arcus indefiniti s iſta formula integrali exprimantur:

$$s = \int \partial \Phi \sqrt{(a a \sin. \Phi^{2n-2} + b b \cos. \Phi^{2n-2})}.$$

Solutio.

§. 23. Cum igitur elementum huius curuae ſit

$$\partial s = \partial \Phi \sqrt{(a a \sin. \Phi^{2n-2} + b b \cos. \Phi^{2n-2})},$$

E 3 euidens

Digitized by Google

euidens eſt huic conditioni ſatisfieri, ſi elementa coordinatarum, quae primo ſint X et Y, ita conſtituantur:

$$\partial X = a\,\partial\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^{n-1} \text{ et } \partial Y = b\,\partial\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi^{n-1};$$

quandoquidem hinc manifeſto fit $\partial X^2 + \partial Y^2 = \partial s^2$. Verum quia hae formulae, pauciſſimis caſibus exceptis, non forent integrabiles, eae noſtro inſtituto minus inſeruiunt; at vero ex iis alias coordinatas, quae ſint x et y, formare licebit, vbi integratio certe ſuccedet. Quodſi enim in genere ſtatuamus

$$\partial x = \partial X\,\text{coſ.}\,\omega - \partial Y\,\text{ſin.}\,\omega \text{ et}$$

$$\partial y = \partial X\,\text{ſin.}\,\omega + \partial Y\,\text{coſ.}\,\omega$$

hinc vtique fiet

$$\partial x^2 + \partial y^2 = \partial X^2 + \partial Y^2 = \partial s^2.$$

Hae autem ſingulae partes reuera integrationem admittent, ſi capiamus $\omega = (n + 2i + 1)\Phi$; quamobrem, ſi loco ∂X et ∂Y valores aſſumtos reſtituamus, ambae coordinatae x et y ita algebraice exprimentur, vt ſit

$$x = a\int\partial\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^{n-1}\,\text{coſ.}\,(n + 2i + 1)\Phi$$
$$- b\int\partial\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi^{n-1}\,\text{ſin.}\,(n + 2i + 1)\Phi \text{ et}$$
$$y = a\int\partial\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^{n-1}\,\text{ſin.}\,(n + 2i + 1)\Phi$$
$$+ b\int\partial\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi^{n-1}\,\text{coſ.}\,(n + 2i + 1)\Phi$$

vbi hae quatuor formulae integrales ope noſtrorum theorematum algebraice exhiberi poterunt, ita vt, dum pro i omnes numeros integros poſitiuos, non excepta zyphra, aſſumere licet, infinitae curuae algebraicae problemati ſatisfacientes aſſignari poterunt, quarum ſimpliciſſima, ſumendo $i = 0$, erit his formulis contenta:

$$x = \frac{a}{n}\,\text{ſin.}\,\Phi^n\,\text{coſ.}\,n\Phi + \frac{b}{n}\,\text{coſ.}\,\Phi^n\,\text{coſ.}\,n\Phi \text{ et}$$

$$y = \frac{a}{n}\,\text{ſin.}\,\Phi^n\,\text{ſin.}\,n\Phi + \frac{b}{n}\,\text{coſ.}\,\Phi^n\,\text{ſin.}\,n\Phi,$$

quae

quae ergo ſuccincte ita referri poſſunt, vt ſit

$$x = \frac{1}{n} \text{coſ.}\, n\Phi\, (a\, \text{ſin.}\, \Phi^n + b\, \text{coſ.}\, \Phi^n) \text{ et}$$

$$y = \frac{1}{n} \text{ſin.}\, n\Phi\, (a\, \text{ſin.}\, \Phi^n + b\, \text{coſ.}\, \Phi^n).$$

Hinc patet fore

$$\frac{y}{x} = \text{tang.}\, \Phi \text{ et } \sqrt{(xx + yy)} = \frac{1}{n} (a\, \text{ſin.}\, \Phi^n + b\, \text{coſ.}\, \Phi^n).$$

Vnde haud difficile erit pro quouis caſu aequationem inter ipſas coordinatas x et y elicere.

Corollarium 1.

§. 24. Elementum curuae

$$\partial s = \partial \Phi \sqrt{(aa\, \text{ſin.}\, \Phi^{2n-2} + bb\, \text{coſ.}\, \Phi^{2n-2})}$$

in plures alias formas notatu dignas transfundere licet. Veluti ſi ponatur ſin. $\Phi = v$, ob $\partial \Phi = \frac{\partial v}{\sqrt{(1-vv)}}$, erit

$$\partial s = \frac{\partial v}{\sqrt{(1-vv)}} \sqrt{[aa v^{2n-2} + bb(1-vv)^{n-1}]},$$

vbi operae pretium eſt notaſſe, caſu $n = 2$ fieri

$$\partial s = \frac{\partial v}{\sqrt{(1-vv)}} \sqrt{[(aa - bb)vv + bb]}$$

qua forma elementum Ellipſeos exprimitur, ita vt ope huius problematis infinitae curuae algebraicae reperiri queant, quarum longitudinem per arcus ellipticos metiri liceat.

Corollarium 2.

§. 25. Pro alia transformatione ponamus

$$\text{ſin.}\, \Phi = \sqrt{\frac{1-v}{2}} \text{ et coſ.}\, \Phi = \sqrt{\frac{1+v}{2}},$$

eritque $\partial \Phi = -\frac{\partial v}{2\sqrt{(1-vv)}}$, hincque ergo fiet

$$\partial s = -\frac{\partial v}{2\sqrt{(1-vv)}} \sqrt{\left[\frac{aa(1-v)^{n-1} + bb(1+v)^{n-1}}{2^{n-1}}\right]},$$

quae formula caſu $n = 2$ abit in hanc:

∂ s

$$\partial s = -\frac{\partial v}{2\sqrt{(1-vv)}}\sqrt{\frac{aa+bb+(bb-aa)v}{2}},$$

qua itidem elementum ellipticum exprimitur.

Corollarium 3.

§. 26. Quodſi porro ponamus tang. $\Phi = t$, erit

$$\text{ſin.}\,\Phi = \frac{t}{\sqrt{(1+tt)}} \text{ et coſ.}\,\Phi = \frac{1}{\sqrt{(1+tt)}},$$

tum vero $\partial\Phi = \frac{\partial t}{1+tt}$, quibus ſubſtitutis elementum curuae noſtrae erit

$$\partial s = \frac{\partial t}{1+tt}\sqrt{\frac{aat^{2n+2}+bb}{(1+tt)^{n-1}}}, \text{ ſiue}$$

$$\partial s = \partial t\sqrt{\frac{aat^{2n-2}+bb}{(1+tt)^{n+1}}},$$

vnde ſumendo $n = 2$ iterum prodit elementum ellipticum

$$\partial s = \partial t\sqrt{\frac{aatt+bb}{(1+tt)^3}}.$$

Scholion.

§. 27. Caeterum quoniam in noſtris theorematibus infiniti factores ſunt indicati, per quos quaepiam formula differentialis multiplicata reddatur integrabilis; meminiſſe iuuabit, in elementis calculi integralis methodum tradi ſolere, qua ex cognito vno tali factore innumerabiles alii reperiri poſſunt. Veluti ſi formula differentialis $v\,\partial x$, ducta in quantitatem p, praebeat integrale $\int p\,v\,\partial x = q$, tum, denotante Q functionem quamcunque ipſius q, etiam multiplicator Qp formulam propoſitam $v\,\partial x$ reddet integrabilem. Cum enim ſit $p\,v\,\partial x = \partial q$, erit $Q\,p\,v\,\partial x = Q\,\partial q$; unde quoties formula $\int Q\,\partial q$ eſt integrabilis, etiam factor ille Qp formulam propoſitam $v\,\partial x$ reddet integrabilem. Verum perſpicuum eſt, hunc caſum toto coelo

Digitized by Google

coelo diſcrepare a formulis illis integralibus, quas in noſtris theorematis attulimus. Nam cum formula $\partial \Phi$ ſin. Φ^{n-1}, ducta in ſin. $(n+1)\Phi$, praebeat integrale $\frac{1}{n}$ ſin. Φ^n ſin. $n\Phi$, hinc nemo certe ſecundum methodum memorátam reliquos multiplicatores idoneos, qui ſunt

ſin. $(n+3)\Phi$; ſin. $(n+5)\Phi$; ſin. $(n+7)\Phi$; etc.

tum vero etiam

coſ. $(n+1)\Phi$; coſ. $(n+3)\Phi$; coſ. $(n+5)\Phi$; etc.

elicere valebit, quamobrem illa theoremata tanto magis omni attentione digna ſunt cenſenda.

Digitized by Google

DE TERMINO GENERALI SERIERVM HYPERGEOMETRICARVM.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 19 Aug. 1776.

§. 1.

Series hypergeometricas hic cum Walliſio appello, quarum termini ſecundum factores continuo multiplicatos procedunt, dum ipſi factores progreſſionem arithmeticam conſtituunt, cuiusmodi eſt notiſſima ſeries: 1, 2, 6, 24, 120, 720 etc. cuius terminus indici n reſpondens eſt 1. 2. 3. 4 . . . . . n. Generaliter igitur ex progreſſione arithmetica quacunque formabitur talis ſeries hypergeometrica:

$$a, a(a+b), a(a+b)(a+2b), a(a+b)(a+2b)(a+3b), \text{ etc.}$$

cuius ergo terminus indici n reſpondens, qui conſtat n factoribus, erit

$$a(a+b)(a+2b)(a+3b)\ldots\ldots[a+(n-1)b];$$

vnde quoties n fuerit numerus integer poſitiuus, terminus ipſi reſpondens per huiusmodi factores facillime aſſignatur, ita vt, ſi index n exprimat abſciſſam cuiuspiam lineae curuae, cuius applicatae per terminos ipſius ſeriei exprimantur; nullum plane eſt dubium, quin etiam abſciſſis per numeros fractos vel etiam ſurdos

Digitized by Google

ſurdos expreſſis determinatae reſpondeant applicatae, quarum autem quantitatem hinc neutiquam definire licet, ſed ad hoc requiritur eiusmodi expreſſio ex quantitatibus a, b et n formata, quae ſemper valorem determinatum exhibeat, ſiue index n fuerit numerus integer, ſiue fractus, ſiue adeo ſurdus.

§. 2. Huiusmodi ſeries hypergeometricas iam ſaepius ſum perſerutatus, vbi potiſſimum ex doctrina interpolationum ſeriei Walliſianae 1, 2, 6, 24, 120 etc. terminum indici indefinito n reſpondentem ita exprimi poſſe inueni, vt ſit

$$= \frac{1^{1-n}.\,2^n}{1+n} \cdot \frac{2^{1-n}.\,3^n}{2+n} \cdot \frac{3^{1-n}.\,4^n}{3+n} \cdot \frac{4^{1-n}.\,5^n}{4+n} \cdot \frac{5^{1-n}.\,6^n}{5+n} \text{ etc.}$$

quae quidem expreſſio in infinitum excurrit, verum tamen ſemper valorem determinatum exprimit, quicunque valor indici n tribuatur. Simili modo pro ſerie generali ſupra allata terminum generalem, ſiue indici indefinito n reſpondentem, ſequenti producto in infinitum excurrente repraeſentari oſtendi:

$$\frac{a^n.\,a^{1-n}(a+b)^n}{a+nb} \cdot \frac{(a+b)^{1-n}(a+2b)^n}{a+(n+1)b} \cdot \frac{(a+2b)^{1-n}(a+3b)^n}{a+(n+2)b} \text{ etc.}$$

Ratiocinia autem, quae me tum temporis ad has formulas perduxerunt, ad theoriam interpolationum erant adſtricta, neque fortaſſe ita enucleata, vt ſatis clare intelligi queant; quamobrem conſtitui iſtam inueſtigationem ex ipſa natura harum ſerierum denuo repetere ac perſpicue explicare.

§. 3. Incipiam igitur ab ipſa ſerie Walliſiana, quandoquidem vim ratiociniorum in caſu ſpeciali multo clarius perſpicere licebit, quam ſi ſtatim ea ad ſeriem generalem accommodare vellem. Cum igitur terminus generalis indici n reſpondens tanquam functio ipſius indicis n ſpectari poſſit, eum more ſatis recepto per $\Delta : n$ exprimam, vbi Δ non quantita-

tem, ſed characterem functionis denotat. Hinc ergo, quoties n fuerit numerus integer poſitiuus, erit

$$\Delta : n = 1 . 2 . 3 . 4 \ldots\ldots n;$$

ex quo intelligitur, pro terminis ſequentibus ſore

$$\Delta : (n + 1) = (n + 1)\, \Delta : n;$$
$$\Delta : (n + 2) = (n + 1)(n + 2)\, \Delta : n;$$
$$\Delta : (n + 3) = (n + 1)(n + 2)(n + 3)\, \Delta : n.$$

Et quoniam in hac continua nouorum factorum acceſſione ipſa ſeriei natura contineri eſt cenſenda, hae poſteriores formulae etiam veritati debent eſſe conſentaneae, quicunque valores indici n tribuantur. Ita cum $\Delta : \frac{1}{2}$ deſignet terminum indici $\frac{1}{2}$ reſpondentem, quem per quadraturam circuli exprimi notum eſt, ex eo ſequentes ita aſſignari poterunt:

$$\Delta : 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}\, \Delta : \tfrac{1}{2};\ \Delta : 2\tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2} . \tfrac{5}{2} . \Delta : \tfrac{1}{2};\ \Delta : 3\tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2} . \tfrac{5}{2} . \tfrac{7}{2} . \Delta : \tfrac{1}{2};\ \text{etc.}$$

Hocque modo res ſe habebit, quicunque alius numerus pro n accipiatur, quamuis fortaſſe valorem $\Delta : n$ nullo modo per menſuras cognitas exprimere liceat.

§. 4. Conſtituto igitur fundamento, cui tota natura harum ſerierum innititur, aliud principium ſtabilire neceſſe eſt, in hoc conſiſtens, quod huiusmodi ſeries in infinitum continuatae tandem cum progreſſione geometrica confundantur; propterea quod noui factores vlterius accedentes tanquam inter ſe aequales ſpectari poſſunt. Ita ſi i denotet numerum infinitum, ſicque $\Delta : i$ terminum ab initio infinite remotum deſignet, termini eum ſequentes ita exhiberi poterunt:

$$\Delta : (i + 1) = (i + 1)\, \Delta : i = i\, \Delta : i;$$
$$\Delta : (i + 2) = (i + 1)(i + 2)\, \Delta : i = i\, i\, \Delta : i;$$
$$\Delta : (i + 3) = (i + 1)(i + 2)(i + 3)\, \Delta : i = i^3\, \Delta : i;$$

ſicque

ſicque in genere ſtatui poterit $\Delta : (i + n) = i^n \Delta : i$. Haec quidem primo aſpectu paradoxa videri poſſunt, quoniam formula $\Delta : i$ iam habet valorem infinite magnum; verum vbi tantum de ratione inter duas pluresue huiusmodi expreſſiones agitur, vtique loco $i + 1$ et $i + 2$ ſcribere licebit i. Quin etiam vice verſa loco i ſcribere licebit $i + 1$, vel $i + 2$, vel in genere $i + \alpha$, denotante α numerum quemcunque finitum, unde etiam generaliter ſtatui poterit

$$\Delta : (i + n) = (i + \alpha)^n \Delta : i$$

§. 5. Cum igitur in genere ſit

$$\Delta : i = 1 . 2 . 3 . 4 \ldots\ldots i,$$

ſi i denotet numerum infinitum, etiamſi fortaſſe fractum, iſta expreſſio nihilominus tanquam determinata ſpectari poterit; tum autem, vt vidimus, erit

$$\Delta : (i + n) = (i + \alpha)^n \Delta : n.$$

Eodem autem modo a formula $\Delta : n$ pariter in infinitum progrediamur, et cum ſit

$$\Delta : (n + 1) = (n + 1) \Delta : n \text{ et}$$

$$\Delta : (n + 2) = (n + 1) (n + 2) \Delta : n; \text{ erit}$$

$$\Delta : (n + i) = (n + 1) (n + 2) (n + 3) \ldots\ldots (n + i) \Delta : n;$$

vbi factorum, quibus formula $\Delta : n$ multiplicatur, numerus eſt i; at vero expreſſio ſupra pro $\Delta : (i + n)$ data, ſi loco $\Delta : i$ eius valor naturalis ſcribatur, erit

$$\Delta : (i + n) = 1 . 2 . 3 . 4 \ldots\ldots i (i + \alpha)^n$$

vbi factorum, quibus formula $(i + \alpha)^n$ multiplicatur, numerus pariter eſt $= i$.

§. 6. Cum igitur manifeſto debeat eſſe $\Delta : (n + i) = \Delta : (i + n)$, ſi altera formularum inuentarum per alteram diuidatur, et fractiones, quia numerus factorum vtrinque eſt

 idem,

Digitized by Google

idem, ſeorſim exprimantur, quotus vtique unitati aequalis prodire debet, ſcilicet erit

$$1 = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2}{n+2} \cdot \frac{3}{n+3} \cdot \frac{4}{n+4} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{i}{n+i} \cdot \frac{(i+\alpha)^n}{\Delta : n}.$$

Ex hac igitur aequatione deriuare licet verum valorem formulae $\Delta : n$, qui adeo ſemper ſubſiſtere debet, ſiue index n ſit numerus integer, ſiue ſecus; habebimus ſcilicet

$$\Delta : n = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2}{n+2} \cdot \frac{3}{n+3} \cdot \frac{4}{n+4} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{i}{n+i} \cdot (i+\alpha)^n$$

quae expreſſio, quomodo noſtrum negotium conficiat, in aliquot caſibus, vbi loco n numeros integros, ſaltem minores, aſſumimus, oſtendiſſe iuuabit.

I. Sit igitur $n = 1$, eritque hinc

$$\Delta : 1 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{4}{5} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{i}{1+i} (i+\alpha);$$

vbi deletis factoribus ſe deſtruentibus prodibit $\Delta : 1 = \frac{1}{1+i}(i+\alpha)$; vbi manifeſto eſt $\frac{i+\alpha}{1+i} = 1$, ob i numerum infinitum, quicunque etiam valor pro α aſſumatur.

II. Sit $n = 2$, et noſtra expreſſio dabit

$$\Delta : 2 = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{4} \cdot \tfrac{3}{5} \cdot \tfrac{4}{6} \cdot \tfrac{5}{7} \cdot \tfrac{6}{8} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{i}{2+i} (i+\alpha)^2;$$

vbi deletis terminis ſe deſtruentibus, in numeratore tantum duo primi, in denominatore autem duo vltimi relinquuntur, ita vt prodeat $\Delta : 2 = \frac{1 \cdot 2 (i+\alpha)^2}{(1+i)(2+i)}$; vbi manifeſto ſit $\frac{(i+\alpha)^2}{(1+i)(2+i)} = 1$, ita vt ſit $\Delta : 2 = 1 \cdot 2$.

III. Sit $n = 3$, et noſtra expreſſio dabit

$$\Delta : 3 = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{2}{5} \cdot \tfrac{3}{6} \cdot \tfrac{4}{7} \cdot \tfrac{5}{8} \cdot \tfrac{6}{9} \cdot \tfrac{7}{10} \cdot \cdot \cdot \frac{i}{3+i} (i+\alpha)^3;$$

vbi in numeratore tantum tres priores, in denominatore vero tantum tres poſteriores factores relinquuntur, ita vt ſit

$$\Delta : 3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 (i+\alpha)^3}{(1+i)(2+i)(3+i)}, \text{ ideoque } \Delta : 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3.$$

Hoc

Digitized by Google

Hoc igitur modo veritas expreſſionis demonſtrari poteſt pro omnibus numeris integris loco n aſſumtis, hincque ſimul ratio intelligitur, cur numerus ille arbitrarius α tuto in calculum introduci potuerit, quia hic tantum ratio inter bina infinita in computum ingreditur.

§. 7. Verum ſi loco n numeros non integros aſſumeremus, ex hac forma nihil plane pro valore $\Delta : n$ cognoſci poſſet, quia tam in numeratore quam denominatore innumerabiles factores relinquerentur, inter quos adeo innumeri forent ipſi infiniti. Quo igitur huic incommodo occurramus, quanquam i in ſe denotat numerum infinitum, nihilominus eius loco ſucceſſiue numeros naturales 1, 2, 3, 4 etc. ſcribamus, et nanciſcemur ſequentes formulas:

$$\text{I. } \Delta : n = \frac{1}{n+1}(1+\alpha)^n.$$

$$\text{II. } \Delta : n = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2}{n+2}(2+\alpha)^n.$$

$$\text{III. } \Delta : n = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2}{n+2} \cdot \frac{3}{n+3}(3+\alpha)^n.$$

$$\text{IV. } \Delta : n = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2}{n+2} \cdot \frac{3}{n+3} \cdot \frac{4}{n+4}(4+\alpha)^n.$$

etc. etc.

vbi euidens eſt has formulas continuo propius ad veritatem accedere debere, quo ulterius continuentur, quandoquidem iis in infinitum continuatis tandem ad verum valorem ipſius $\Delta : n$ perueniri oportet.

§. 8. Quia quaelibet harum formularum antecedentem inuoluit, ſiue totam, ſiue ex parte, diuidamus quamlibet per ſuam praecedentem ac obtinebimus

$$\frac{\text{II}}{\text{I}} \cdot \frac{2}{n+2} \cdot \frac{(2+\alpha)^n}{(1+\alpha)^n}$$

Digitized by Google

$$\frac{III}{II} \cdot \frac{3}{n+3} \cdot \frac{(3+\alpha)^n}{(2+\alpha)^n}$$

$$\frac{IV}{III} \cdot \frac{4}{n+4} \cdot \frac{(4+\alpha)^n}{(3+\alpha)^n}$$

etc.

Hoc igitur modo valores praecedentes in ſequentes inuoluamus, et cum ſit I.

$$\Delta : n = \frac{1}{n+1}(1+\alpha)^n,$$

pro numero II habebimus

$$\Delta : n = \frac{1}{n+1}(1+\alpha)^n \frac{2}{n+2} \cdot \frac{(2+\alpha)^n}{(1+\alpha)^n}.$$

Ex hoc porro pro numero III prodit

$$\Delta : n = \frac{1}{n+1}(1+\alpha)^n \frac{2}{n+2} \cdot \frac{(2+\alpha)^n}{(1+\alpha)^n} \cdot \frac{3}{n+3} \cdot \frac{(3+\alpha)^n}{(2+\alpha)^n}.$$

Ex hoc pari modo pro numero IV prodibit

$$\Delta : n = \frac{1}{n+1}(1+\alpha)^n \frac{2}{n+2} \cdot \frac{(2+\alpha)^n}{(1+\alpha)^n} \cdot \frac{3}{n+3} \cdot \frac{(3+\alpha)^n}{(2+\alpha)^n} \cdot \frac{4}{n+4} \cdot \frac{(4+\alpha)^n}{(3+\alpha)^n}.$$

§. 9. Quodſi ergo has expreſſiones in infinitum continuemus, tandem ipſam veritatem aſſequemur; verum quia ratio primi membri a ſequentibus recedit, id facile ad vniformitatem perducere licebit, dum ſcilicet per α^n diuiditur, tum vero tota expreſſio per α^n multiplicatur; ſicque perueniemus ad ſequens productum in infinitum excurrens, quo verus valor functionis $\Delta : n$ exprimetur, erit nimirum

$$\Delta : n = \alpha^n \frac{1}{n+1}\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)^n \frac{2}{n+2}\left(\frac{2+\alpha}{1+\alpha}\right)^n \frac{3}{n+3}\left(\frac{3+\alpha}{2+\alpha}\right)^n \frac{4}{n+4}\left(\frac{4+\alpha}{3+\alpha}\right)^n \text{etc.}$$

quae

quae ergo expreſſio manifeſto determinatum valorem indicat, quicunque numerus, ſiue integer, ſiue fractus, pro n accipiatur, propterea quod hi factores continuo propius ad unitatem accedunt, id quod clariſſime patebit ex forma factoris infiniteſimi, quae eſt

$$\frac{i}{n+i} \cdot \left(\frac{i+\alpha}{i-1+\alpha}\right)^n$$

cuius valor, ob $i = \infty$, manifeſto eſt $= 1$, quandoquidem prae i abiiciuntur adiecta n, α et $\alpha - 1$.

§. 10. Haec forma iam egregie conuenit cum ea, quam initio commemorauimus, quippe quae, ſi poteſtates exponentis n coniungantur, reducitur ad hanc formam:

$$\Delta : n = \frac{1}{n+1}\left(\frac{2}{1}\right)^n \cdot \frac{2}{n+2}\left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{3}{n+3}\left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot \text{ etc.}$$

ad quam modo inuenta redigitur, ſumendo $\alpha = 1$. Ex quo intelligitur, formulam, quam nunc inuenimus, multo generaliorem eſſe, dum loco α alios quoſuis numeros accipere licet. Interim tamen nullum eſt dubium, quin ambae formulae pro omnibus valoribus ipſius n eosdem valores exhibeant. Id ſaltem ex ſupra factis euolutionibus, pro numeris integris, ſatis eſt euictum, dum verbi gratia prodiit $\Delta : 3 = 1 . 2 . 3$, quicquid etiam pro α acciperetur.

§. 11. Quod autem quantitas litterae α plane non afficiat valorem ipſius $\Delta : n$, id primo inde intelligi poteſt, quod omnes poteſtates ipſius α, vsque ad infiniteſimam, ſe mutuo tollunt; tum vero etiam hoc modo oſtendi poteſt, ſi loco α ſcribatur alius quicunque valor β, tum pariter fore

$$\Delta : n = \beta^n \frac{1}{n+1}\left(\frac{1+\beta}{\beta}\right)^n \cdot \frac{2}{n+2}\left(\frac{2+\beta}{1+\beta}\right)^n \cdot \frac{3}{n+3}\left(\frac{3+\beta}{2+\beta}\right)^n \text{ etc.}$$

Quotus ex diuiſione illius per hanc ortus prodit

$$1 = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \left[\frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha(\beta+1)}\right]^n \cdot \left[\frac{(\alpha+2)(\beta+1)}{(\alpha+1)(\beta+2)}\right]^n \text{ etc.}$$

vnde ſi radix poteſtatis n extrahatur, prodit

$$1 = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha(\beta+1)} \cdot \frac{(\alpha+2)(\beta+1)}{(\alpha+1)(\beta+2)} \cdot \frac{(\alpha+3)(\beta+2)}{(\alpha+2)(\beta+3)} \text{ etc.}$$

quae fractio in infinitum continuata manifeſto reducitur ad $\frac{\alpha+i}{\beta+i}$, cuius valor, ob i infinitum, vtique eſt unitas; ſicque demonſtratum eſt hos ambos valores ipſius $\Delta:n$ eſſe inter ſe aequales. Eadem autem demonſtratio quoque valebit pro ſequenti euolutione, vbi omnes ſeries hypergeometricas in genere ſumus contemplaturi.

Explicatio Analyſeos pro ſerie hypergeometrica generali.

§. 13. Conſideremus nunc ſimili modo hanc ſeriem hypergeometricam generalem:

a, $a(a+b)$, $a(a+b)(a+2b)$, $a(a+b)(a+2b)(a+3b)$, etc. cuius terminus indici n reſpondens, qui ſcilicet componitur ex n factoribus, ponatur

$$a(a+b)(a+2b)(a+3b)\ldots\ldots[a+(n-1)b] = \Delta:n,$$

quandoquidem, ob litteras a et b conſtantes, ſpectari poterit tanquam functio quantitatis variabilis n. Hinc igitur ex indole formationis erit

$$\Delta:(n+1) = \Delta:n(a+nb);$$

$$\Delta:(n+2) = \Delta:n(a+nb)[a+(n+1)b];$$

$$\Delta:(n+3) = \Delta:n(a+nb)[a+(n+1)b][a+(n+2)b];$$

atque adeo, ſi i denotet numerum infinitum, erit

$$\Delta:(n+i) = \Delta:n(a+nb)[a+(n+1)b]\ldots\ldots[a+(n+i-1)b]$$

§. 14. Ex indole autem ipſius formae eſt

$\Delta:i$

Digitized by Google

$$\Delta : i = a\,(a+b)\,(a+2\,b) \ldots\ldots [a+(i-1)\,b],$$

vnde pro ſequentibus fiet

$$\Delta : (i+1) = \Delta : i\,(a+i\,b)$$
$$\Delta : (i+2) = \Delta : i\,(a+i\,b)\,[a+(i+1)\,b]$$
$$\Delta : (i+3) = \Delta : i\,(a+i\,b)\,[a+(i+1)\,b]\,[a+(i+2)\,b]$$
etc. etc.

vbi factores de nouo accedentes tanquam aequales inter ſe ſpectari poſſunt, ita vt ſit

$$\Delta : (i+3) = \Delta : i\,(a+i\,b)^3,$$

vnde pro numero indefinito n habebimus

$$\Delta : (i+n) = \Delta : i\,(a+i\,b)^n$$

atque adeo, quoniam aequo iure loco $a+i\,b$ ſumere potuiſſemus $a+b+i\,b$, vel etiam $a+2\,b+i\,b$, generaliter ſtatuere poterimus

$$\Delta : (i+n) = \Delta : i\,(a+i\,b)^n$$

denotante a quantitatem quamcunque finitam, prae $i\,b$ euaneſcentem.

§. 15. Quoniam igitur duplicem nacti ſumus expreſſionem pro eadem functione $\Delta : (i+n)$, comparatione inſtituta inde eliciemus

$$\Delta : n = \frac{\Delta : i\,(a+i\,b)^n}{(a+n\,b)\,[a+(n+1)\,b] \ldots\ldots [a+(n+i-1)\,b]}$$

vbi in denominatore habebimus i factores. Reſtituamus igitur loco $\Delta : i$ ipſum productum, quod pariter conſtat ex i factoribus, unde reſultabit ſequens valor:

$$\Delta : n = \frac{a}{a+n\,b} \cdot \frac{a+b}{a+(n+1)\,b} \cdot \frac{a+2\,b}{a+(n+2)\,b} \ldots\ldots \frac{a+(i-1)\,b}{a+(n+i-1)\,b}\,(a+i\,b)^n;$$

hicque eſt verus valor ipſius $\Delta : n$, dummodo pro i accipiatur numerus infinite magnus, nullo habito reſpectu ad indicem n, ſiue is ſit numerus integer, ſiue fractus, ſiue adeo ſurdus.

§. 16. Ex his intelligitur, ſi loco i finitos accipiamus valores, errorem huius expreſſionis eo fieri minorem, quo maior ſumtus fuerit numerus i; quae appropinquatio ad veritatem quo clarius perſpici queat, loco i ordine ſcribamus numeros 1, 2, 3, 4 etc. et expreſſiones inde ortas deſignemus ſignis I, II, III, etc. prodibitque

$$\text{I. } \frac{a}{a+nb}(a+b)^n.$$

$$\text{II. } \frac{a}{a+nb}\cdot\frac{a+b}{a+(n+1)b}(a+2b)^n.$$

$$\text{III. } \frac{a}{a+nb}\cdot\frac{a+b}{a+(n+1)b}\cdot\frac{a+2b}{a+(n+2)b}(a+3b)^n.$$

$$\text{IV. } \frac{a}{a+nb}\cdot\frac{a+b}{a+(n+1)b}\cdot\frac{a+2b}{a+(n+2)b}\cdot\frac{a+3b}{a+(n+3)b}(a+4b)^n.$$

etc.

Hinc autem porro colligitur

$$\frac{\text{II.}}{\text{I.}}=\frac{a+b}{a+(n+1)b}\left(\frac{a+2b}{a+b}\right)^n;$$

$$\frac{\text{III.}}{\text{II.}}=\frac{a+2b}{a+(n+2)b}\left(\frac{a+3b}{a+2b}\right)^n;$$

$$\frac{\text{IV.}}{\text{III.}}=\frac{a+3b}{a+(n+3)b}\left(\frac{a+4b}{a+3b}\right)^n.$$

etc. etc.

Quodſi ergo hoc modo in infinitum progrediamur, perueniemus ad verum valorem ipſius $\Delta : n$, qui ſequentibus factoribus in ſe inuicem ducendis conſtabit, poſtquam ſcilicet primum factorem ad formam ſequentium perduxerimus:

$$\Delta : n = a^n \frac{a}{a+nb}\left(\frac{a+b}{a}\right)^n\cdot\frac{a+b}{a+(n+1)b}\left(\frac{a+2b}{a+b}\right)^n\cdot\frac{a+2b}{a+(n+2)b}\left(\frac{a+3b}{a+2b}\right)^n\cdot$$
$$\frac{a+3b}{a+(n+3)b}\left(\frac{a+4b}{a+3b}\right)^n \text{ etc.}$$

§. 17.

§. 17. Hoc igitur modo nacti ſumus pro $\Delta : n$ productum in infinitum excurrens, cuius ſinguli factores ſecundum legem ſatis regularem procedunt; vbi imprimis obſeruari conuenit, ſingulos factores totos, ſiue membra, continuo propius ad veritatem accedere, quandoquidem membrum infiniteſimum erit

$$\frac{a+(i-1)b}{a+(n+i-1)b}\left(\frac{\alpha+ib}{\alpha+(i-1)b}\right)^n$$

quae expreſſio, deletis partibus quae prae infinito euaneſcunt, manifeſto ad unitatem redigitur. Tum vero iam obſeruauimus quantitatem α penitus arbitrio noſtro relinqui, neque inde valorem $\Delta : n$ affici, unde quouis caſu eum ita accipere licebit, vt calculus commodior euadat; quamobrem vtique operae pretium erit obſeruaſſe, pro huiusmodi ſeriebus terminum generalem multo uniuerſaliori forma repraeſentari poſſe ea, quam initio adduximus, quippe quae ex praeſenti naſcitur, ponendo $\alpha = a$.

Applicatio huius formae generalis ad caſum $n = \frac{1}{2}$.

§. 18. Facile intelligitur, expreſſionem infinitam pro $\Delta : n$ inuentam imprimis ſummum vſum praeſtare poſſe, quando termini ſeriei deſiderantur, quorum indices ſunt numeri fracti, quandoquidem termini indicibus integris reſpondentes per ſe ſunt cogniti. Quaeramus igitur primo eum noſtrae ſeriei terminum, qui indici $n = \frac{1}{2}$ reſpondeat, qui ergo per $\Delta : \frac{1}{2}$ exprimetur, ita vt ſit

$$\Delta : \tfrac{1}{2} = \sqrt{\alpha}\,\frac{a}{a+\frac{1}{2}b}\sqrt{\frac{\alpha+b}{\alpha}}\cdot\frac{a+b}{a+\frac{3}{2}b}\sqrt{\frac{\alpha+2b}{\alpha+b}}\cdot\frac{a+2b}{a+\frac{5}{2}b}\sqrt{\frac{\alpha+3b}{\alpha+2b}}\ \text{etc.}$$

in infinitum. Inuento autem iſto valore ſimul facile innoteſcunt omnes termini intermedii a binis contiguis aequidiſtantes; erit enim

$$\Delta : 1\tfrac{1}{2} = \Delta : \tfrac{1}{2}(a + \tfrac{1}{2}b)$$

qui terminus inter primum a et ſecundum $a(a+b)$ medium interiacet; ſimilique modo erit

$$\Delta : 2\tfrac{1}{2} = \Delta : \tfrac{1}{2}(a + \tfrac{1}{2}b)(a + \tfrac{3}{2}b)$$

qui inter ſecundum et tertium medium interiacet. Praeterea vero erit

$$\Delta : 3\tfrac{1}{2} = \Delta : \tfrac{1}{2}(a + \tfrac{1}{2}b)(a + \tfrac{3}{2}b)(a + \tfrac{5}{2}b)$$

$$\Delta : 4\tfrac{1}{2} = \Delta : \tfrac{1}{2}(a + \tfrac{1}{2}b)(a + \tfrac{3}{2}b)(a + \tfrac{5}{2}b)(a + \tfrac{7}{2}b)$$

etc. etc.

Nunc autem hic quaeri ſolet, quomodo iſta producta in infinitum excurrentia ad expreſſiones finitas reuocari conueniat, quandoquidem illa producta in infinitum extenſa tantum inſeruire poſſunt valori ipſius $\Delta : \tfrac{1}{2}$ vero proxime inueniendo. Imprimis autem deſiderari ſolet ſpecies quantitatum transcendentium, ad quam iſte valor $\Delta : \tfrac{1}{2}$ ſit referendus, id quod per ea, quae a me paſſim circa huiusmodi producta infinita ſunt expoſita, haud difficulter praeſtari poterit. Ante omnia autem neceſſe eſt factores radicales e medio tolli, quod fit quadratis ſumendis, unde habebimus

$$(\Delta : \tfrac{1}{2})^2 = \alpha \frac{aa}{(a+\frac{1}{2}b)^2} \cdot \frac{\alpha+b}{\alpha}\left(\frac{a+b}{a+\frac{3}{2}b}\right)^2 \frac{\alpha+2b}{\alpha+b}\left(\frac{a+2b}{a+\frac{5}{2}b}\right)^2 \frac{\alpha+3b}{\alpha+2b} \text{ etc.}$$

§. 19. Quoniam autem hic littera α ab arbitrio noſtro pendet, eam ita accipiamus, vt numerus factorum in ſingulis membris imminuatur, quod fiet ſumendo $\alpha = a$; tum enim erit

$$(\Delta : \tfrac{1}{2})^2 = a \frac{a(a+b)}{(a+\frac{1}{2}b)(a+\frac{1}{2}b)} \cdot \frac{(a+b)(a+2b)}{(a+\frac{3}{2}b)(a+\frac{3}{2}b)} \cdot \frac{(a+2b)(a+3b)}{(a+\frac{5}{2}b)(a+\frac{5}{2}b)} \cdot \frac{(a+3b)(a+4b)}{(a+\frac{7}{2}b)(a+\frac{7}{2}b)} \cdot$$
etc.

Vt

Digitized by Google

Vt autem hinc fractiones partiales ex denominatoribus tollamus, ſingulos factores tam numeratoris quam denominatoris duplicemus, vt prodeat iſta forma:

$$(\Delta:\tfrac{1}{2})^2 = a\cdot\frac{2a(2a+2b)}{(2a+b)(2a+b)}\cdot\frac{(2a+2b)(2a+4b)}{(2a+3b)(2a+3b)}\cdot\frac{(2a+4b)(2a+6b)}{(2a+5b)(2a+5b)}\text{ etc.}$$

vbi ſinguli factores cuiusque membri pro membro ſequenti augmentum capiunt $= 2b$. Nunc autem iſta forma facile ad expreſſiones finitas reuocari poterit, per ea quae paſſim ſunt explicata.

§. 20. Si enim litteris P et Q iſtae formulae integrales deſignentur:

$$P = \int\frac{x^{p-1}\partial x}{(1-x^n)^{1-\frac{m}{n}}}\text{ et } Q = \int\frac{x^{q-1}\partial x}{(1-x^n)^{1-\frac{m}{n}}}$$

quae ſcilicet integralia ab $x = 0$ ad $x = 1$ extendi ſunt intelligenda, oſtendi fractionem $\frac{P}{Q}$ in ſequens productum infinitum conuerti poſſe:

$$\frac{P}{Q} = \frac{q(m+p)}{p(m+q)}\cdot\frac{(q+n)(m+p+n)}{(p+n)(m+q+n)}\cdot\frac{(q+2n)(m+p+2n)}{(p+2n)(m+q+2n)}\text{ etc.}$$

vbi ſinguli factores cuiusque membri continuo quantitate $= n$ increſcunt; unde ſtatim patet, vt iſta forma ad eam, quae nobis eſt propoſita, redigatur, ſumi debere $n = 2b$; tum vero ſufficit prima membra vtrinque inter ſe aequari, ſcilicet

$$\frac{q(m+p)}{p(m+q)} = \frac{2a(2a+2b)}{(2a+b)(2a+b)}$$

id quod fit ſumendo $q = 2a$ et $p = 2a+b$, tum vero $m = b$, quibus valoribus ſubſtitutis fractio $\frac{P}{Q}$, ducta in a, ipſum valorem $(\Delta:\frac{1}{2})^2$, quem quaerimus, modo finito exprimet.

§. 21. Facta autem ſubſtitutione modo inuenta, ob $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ fit

$$P = \int\frac{x^{2a+b-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^{2b})}}\text{ et } Q = \int\frac{x^{2a-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^{2b})}}$$

quae

quae integralia perpetuo ab $x=0$ ad $x=1$ ſunt extendenda, quo facto erit $(\Delta:\frac{1}{2})^2 = a\frac{P}{Q}$, hincque radice extracta erit

$$\Delta:\tfrac{1}{2} = \sqrt{a}\,.\int\frac{x^{2a+b-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^{2b})}}:\int\frac{x^{2a-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^{2b})}},$$

ex qua formula ſtatim patebit quouis caſu, a quanam quantitatum tranſcendentium ſpecie valor quaeſitus $\Delta:\frac{1}{2}$ pendeat, id quod operae pretium erit nonnullis exemplis illuſtrare.

Exemplum 1.

§. 22. Sumatur $a=1$ et $b=1$, vt prodeat ipſa ſeries hypergeometrica Walliſiana

$$1,\ 1.2,\ 1.2.3,\ 1.2.3.4,\ 1.2.3.4.5,\ \text{etc.}$$

cuius terminus indici $\frac{1}{2}$ reſpondens per $\Delta:\frac{1}{2}$ deſignatus requiritur. Per formulam igitur inuentam erit

$$\Delta:\tfrac{1}{2} = \sqrt{\int\frac{xx\partial x}{\sqrt{1-xx}}:\int\frac{x\partial x}{\sqrt{(1-xx)}}}.$$

Conſtat autem, his integralibus ab $x=0$ ad $x=1$ extenſis, eſſe primo $\int\frac{x\partial x}{\sqrt{(1-xx)}}=1$, tum vero

$$\int\frac{xx\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \tfrac{1}{2}\int\frac{\partial x}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{\pi}{4},$$

vnde patet fore

$$\Delta:\tfrac{1}{2} = \sqrt{\tfrac{\pi}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi};$$

reliqui autem termini intermedii huius ſeriei erunt

$$\Delta:1\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{2}.\sqrt{\pi}.$$
$$\Delta:2\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{2}.\tfrac{5}{2}.\sqrt{\pi}.$$
$$\Delta:3\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{2}.\tfrac{5}{2}.\tfrac{7}{2}.\sqrt{\pi}.$$

etc. etc.

vnde patet terminum ordine praecedentem, qui reſpondet indici $-\frac{1}{2}$ fore $\Delta:-\frac{1}{2}=\sqrt{\pi}$, prorſus vti iam a Walliſio eſt obſeruatum.

Exem-

Digitized by Google

Exemplum 2.

§. 23. Sumatur $a = 1$ et $b = 2$, vnde iſta progreſſio hypergeometrica oritur: 1, 1. 3, 1. 3. 5, 1. 3. 5. 7, 1. 3. 5. 7. 9 etc. Alius terminus indici $\frac{1}{2}$ reſpondens quaeritur, is ergo erit $\Delta : \frac{1}{2} = \sqrt{\int \frac{x^3 \partial x}{\sqrt{(1 - x^4)}} : \int \frac{x \partial x}{\sqrt{(1 - x^4)}}}$. Quodſi iam hic loco xx ſcribamus y, habebimus $\int \frac{x^3 \partial x}{\sqrt{(1 - x^4)}} = \frac{1}{2} \int \frac{y \partial y}{\sqrt{(1 - yy)}}$, cuius valor ab $y = 0$ ad $y = 1$ extenſus eſt $= \frac{1}{2}$; altera vero formula $\int \frac{x \partial x}{\sqrt{(1 - x^4)}}$ abit in hanc: $\frac{1}{2} \int \frac{\partial y}{\sqrt{(1 - yy)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$. His ergo valoribus ſubſtitutis erit $\Delta : \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, qui valor etiam a quadratura circuli pendet. Tum autem termini ſequentes intermedii erunt:

$$\Delta : 1\tfrac{1}{2} = 2\sqrt{\tfrac{2}{\pi}},$$
$$\Delta : 2\tfrac{1}{2} = 2.\,4\sqrt{\tfrac{2}{\pi}},$$
$$\Delta : 3\tfrac{1}{2} = 2.\,4.\,6\sqrt{\tfrac{2}{\pi}},$$
$$\Delta : 4\tfrac{1}{2} = 2.\,4.\,6.\,8\sqrt{\tfrac{2}{\pi}},$$

etc. etc.

hincque patet terminum indici $-\frac{1}{2}$ reſpondentem $\Delta : -\frac{1}{2}$ fore infinitum.

Applicatio pro termino harum ſerierum inueniendo cuius index $= \frac{1}{3}$.

§. 24. Ponamus igitur hic $n = \frac{1}{3}$, et formula generalis inuenta nobis praebebit

$$\Delta : \tfrac{1}{3} = \sqrt[3]{a} \cdot \frac{a}{a + \frac{1}{3} b} \sqrt[3]{\frac{a+b}{a}} \cdot \frac{a+b}{a + \frac{4}{3} b} \sqrt[3]{\frac{a + 2b}{a+b}} \cdot \frac{a + 2b}{a + \frac{7}{3} b} \sqrt[3]{\frac{a + 3b}{a + 2b}} \text{ etc.}$$

Hinc ergo ſumendis cubis erit

$$(\Delta : \tfrac{1}{3})^3 = a \cdot \frac{a^3}{(a + \frac{1}{3} b)^3} \cdot \frac{a+b}{a} \cdot \frac{(a+b)^3}{(a + \frac{4}{3} b)^3} \cdot \frac{a + 2b}{a+b} \text{ etc.}$$

Jam ad fractiones tollendas ponamus $b = 3c$, fietque

$$(\Delta : \tfrac{1}{3})^3 = \alpha \cdot \frac{a^3}{(a+c)^3} \cdot \frac{\alpha+3c}{\alpha} \cdot \frac{(a+3c)^3}{(a+4c)^3} \cdot \frac{\alpha+6c}{\alpha+3c} \cdot \frac{(a+6c)^3}{(a+7c)^3} \cdot \frac{\alpha+9c}{\alpha+6c} \text{ etc.}$$

vbi $3c$ eſt incrementum, quod ſinguli factores accipiunt, dum a quouis membro ad ſequens progredimur. Quodſi ergo capiamus $\alpha = a$, ad ſequentem formam ſimpliciorem peruenimus:

$$(\Delta : \tfrac{1}{3})^3 = a \cdot \frac{aa(a+3c)}{(a+c)(a+c)(a+c)} \cdot \frac{(a+3c)(a+3c)(a+6c)}{(a+4c)(a+4c)(a+4c)} \cdot \frac{(a+6c)(a+6c)(a+9c)}{(a+7c)(a+7c)(a+7c)} \text{ etc.}$$

§. 25. Quoniam hic in quouis membro terni occurrunt factores, comparationem cum forma pro $\frac{P}{Q}$ exhibita immediate inſtituere non licet. Verum hic binas huiusmodi fractiones $\frac{P}{Q}$ et $\frac{P'}{Q'}$, quarum productum aequatur formae inuentae, in ſubſidium vocari oportet; et quoniam primum noſtrum membrum eſt $= \frac{aa(a+3c)}{(a+c)(a+c)(a+c)}$, bina autem membra ex multiplicatione illa orta quatuor producunt factores, in ſingulis membris tam ſupra quam infra nouum factorem f adiungamus, vt in duas partes diſcerpi poſſint, quae pro primo ſint $\frac{aa}{(a+c)f} \cdot \frac{f(a+3c)}{(a+c)(a+c)}$, et nunc vtramque partem cum $\frac{q(m+p)}{p(m+q)}$ comparemus. Pro priore autem parte ſtatuamus $q = a$ et $p = f$, fietque $m + p = m + f = a$ et $m + q = m + a = a + c$, vnde colligitur $m = c$ et $f = a - c$; tum autem ad ſequentia membra progrediendo fiet $n = 3c$.

§. 26. Quodſi iam ſingula membra noſtrae expreſſionis in binas huiusmodi partes reſoluamus, introducta noua littera $f = a - c$, quae pariter in ſequentibus membris augmentum $3c$ accipiet, omnes partes priores ſeorſim conſideremus, quarum productum aequabitur fractioni $\frac{P}{Q}$, eritque ex valoribus iam erutis

$$P = \int \frac{x^{a-c-1}\,\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^{3c})^2}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{a-1}\,\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^{3c})^2}}.$$

§. 27.

§. 27. Pro partibus autem poſterioribus in ſubſidium vocemus fractionem $\frac{P'}{Q'}$, dum etiam litteras minuſculas p, q, et m ſimili apice notabimus. Hinc igitur comparatio primorum membrorum dabit

$$\frac{q'(m'+p')}{p'(m'+q')} = \frac{f(a+3c)}{(a+c)(a+c)},$$

hanc ob rem ſumamus

$$q' = f = a - c \text{ et } p' = a + c$$

tum autem erit

$$m' + p' = m' + a + c = a + 3c \text{ et}$$
$$m' + q' = m' + a - c = a + c$$

vtrinque autem fit $m' = 2c$, tum vero manet vt ante $n = 3c$, ex quo nouae iſtae formulae ita determinabuntur:

$$P' = \int \frac{x^{a+c-1}\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^{3c})}} \text{ et } Q' = \int \frac{x^{a-c-1}\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^{3c})}}.$$

§. 28. Cum igitur fractio $\frac{P}{Q}$ exprimat productum omnium partium priorum, at vero $\frac{P'}{Q'}$ productum omnium partium poſteriorum, habebimus

$$(\Delta : \tfrac{1}{3})^3 = a\frac{P}{Q} \cdot \frac{P'}{Q'}, \text{ ideoque}$$

$$\Delta : \tfrac{1}{3} = \sqrt[3]{\frac{aPP'}{QQ'}},$$

ſicque ad hunc terminum interpolatum $\Delta : \frac{1}{3}$ definiendum quatuor formulis integralibus opus erit, inter quas in genere nulla relatio perſpicitur: erit enim facta ſubſtitutione

$$\Delta : \tfrac{1}{3} = \sqrt[3]{a \int \frac{x^{a-c-1}\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^{3c})^2}} \times \int \frac{x^{a+c-1}\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^{3c})}}} : \sqrt[3]{\int \frac{x^{a-1}\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^{3c})^2}} \times \int \frac{x^{a-c-1}\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^{3c})}}}$$

vbi meminiſſe oportet loco litterae b hic ſcriptum eſſe $3c$, ita vt ſit $c = \frac{1}{3}b$. Hanc expreſſionem exemplo ſeriei Walliſianae illuſtraſſe ſufficiat.

Digitized by Google

Exemplum.

§. 29. Sit igitur $a = 1$ et $b = 1$, ideoque $c = \frac{1}{3}$, et quatuor formulae integrales erunt:

$$P = \int \frac{x^{-\frac{1}{3}} \partial x}{\sqrt[3]{(1-x)^2}} \text{ et } Q = \int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$$

$$P' = \int \frac{x^{\frac{1}{3}} \partial x}{\sqrt[3]{(1-x)}} \text{ et } Q' = \int \frac{x^{-\frac{1}{3}} \partial x}{\sqrt[3]{(1-x)}}.$$

quae formulae vt ab exponentibus fractis liberentur, ſtatuatur $x = y^3$, eritque

$$P = 3 \int \frac{y \partial y}{\sqrt[3]{(1-y^3)^2}}, \quad Q = 3 \int \frac{y y \partial y}{\sqrt[3]{(1-y^3)^2}};$$

$$P' = 3 \int \frac{y^3 \partial y}{\sqrt[3]{(1-y^3)}}, \quad Q' = 3 \int \frac{y \partial y}{\sqrt[3]{(1-y^3)}};$$

ex quibus valoribus fit

$$\Delta : \tfrac{1}{3} = \sqrt[3]{\frac{a P P'}{Q Q'}}$$

vbi notetur eſſe

$$\int \frac{y^3 \partial y}{\sqrt[3]{(1-y^3)}} = \tfrac{1}{3} \int \frac{\partial y}{\sqrt[3]{(1-y^3)}}.$$

§. 30. Iam ſingulas iſtas formulas accuratius euoluamus, ac primo quidem formula $\int \frac{\partial y}{\sqrt[3]{(1-y^3)}}$ ad circulum reduci poteſt. Poſito enim $\frac{y}{\sqrt[3]{(1-y^3)}} = z$, formula noſtra

fit

fit $\frac{z\,\partial y}{y}$, tum autem erit

$$y^3 = \frac{z^3}{1+z^3} \text{ et } 3\,ly = 3\,lz - l(1+z^3)$$

hincque

$$\frac{\partial y}{y} = \frac{\partial z}{z} - \frac{zz\,\partial z}{1+z^3} = \frac{\partial z}{z(1+z^3)},$$

ſicque formula noſtra fiet $= \int \frac{\partial z}{1+z^3}$, cuius integrale ab $y = 0$ ad $y = 1$, hoc eſt a $z = 0$ ad $z = \infty$, eſt $= \frac{\pi}{3\text{ ſin. }\frac{1}{3}\pi} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$, ſicque erit $P' = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. At pro P formula $\int \frac{y\,\partial y}{\sqrt[3]{(1-y^3)^2}}$ per eandem ſubſtitutionem $\frac{y}{\sqrt[3]{(1-y^3)}} = z$ reducitur ad hanc: $\int \frac{zz\,\partial y}{y} = \int \frac{z\,\partial z}{1+z^3}$, cuius integrale eſt $\frac{\pi}{3\text{ ſin. }\frac{2}{3}\pi} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$, vnde fit $P = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

Porro vero pro Q eſt $\int \frac{yy\,\partial y}{\sqrt[3]{(1-y^3)^2}} = 1 - \sqrt[3]{(1-y^3)}$, vnde poſito $y = 1$ fiet $Q = 3$. Denique formula $Q' = 3\int \frac{y\,\partial y}{\sqrt[3]{(1-y^3)}}$ nullo modo ad menſuras cognitas ſe reduci patitur, ſed quadraturam ſingularem inuoluit. Ex his formulis conficitur

$$\Delta : \tfrac{1}{3} = \sqrt[3]{\frac{4\pi\pi}{81.\int \frac{y\,\partial y}{\sqrt[3]{(1-y^3)}}}},$$

ex quo valore porro deducuntur ſequentes:

$$\Delta : 1\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3}\,\Delta : \tfrac{1}{3}.$$

$$\Delta : 2\tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{3}.\tfrac{7}{3}\,\Delta : \tfrac{1}{3}.$$

$$\Delta : 3\tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{7}{3} \cdot \tfrac{10}{3}\, \Delta : \tfrac{1}{3} \,.$$

etc. etc.

Hinc autem facile intelligitur quomodo inueſtigationem tractari oporteat, ſi loco n aliae fractiones proponantur.

Concluſio.

§. 31. Quemadmodum hic pro ſerie

$a,\ a(a+b),\ a(a+b)(a+2b),\ a(a+b)(a+2b)(a+3b)$, etc. terminum indici indefinito n reſpondentem $\Delta : n$ ita expreſſum inuenimus, vt ſit:

$$\Delta : n = \alpha^n \cdot \frac{a}{a+nb}\left(\frac{\alpha+b}{\alpha}\right)^n \cdot \frac{a+b}{a+(n+1)b}\left(\frac{\alpha+2b}{\alpha+b}\right)^n \text{etc.}$$

ſi loco a alium quemcunque numerum c accipiamus, vt ſeries ſit

$c,\ c(c+b),\ c(c+b)(c+2b),\ c(c+b)(c+2b)(c+3b)$ etc. et eius terminum indici n reſpondentem deſignemus per $\Gamma : n$, tum erit ſimili modo

$$\Gamma : n = \alpha^n \cdot \frac{c}{c+nb}\left(\frac{\alpha+b}{\alpha}\right)^n \cdot \frac{c+b}{c+(n+1)b}\left(\frac{\alpha+2b}{\alpha+b}\right)^n \text{etc.}$$

vbi quidem α alium quemcunque valorem ſignificare poſſet atque in prima. Quodſi nunc poſteriorem ſeriem per priorem diuidamus, naſcetur inde ſequens ſeries:

$$\frac{a}{c},\ \frac{a(a+b)}{c(c+b)},\ \frac{a(a+b)(a+2b)}{c(c+b)(c+2b)},\ \frac{a(a+b)(a+2b)(a+3b)}{c(c+b)(c+2b)(c+3b)} \text{ etc.}$$

atque manifeſtum eſt terminum indici n reſpondentem fore $\frac{\Delta : n}{\Gamma : n}$; vnde ſi vtrinque pro α eundem accipiamus numerum, poteſtates exponentis n omnes ſe mutuo tollent, ita vt pro hac ſerie terminus generalis, ſeu indici n reſpondens, ſit

$$= \frac{a(c+nb)}{(a+nb)c} \cdot \frac{(a+b)[c+(n+1)b]}{[a+(n+1)b](c+b)} \cdot \frac{(a+2b)[c+(n+2)b]}{[a+(n+2)b](c+2b)} \text{ etc.}$$

vbi

vbi ergo interpolatio ſine vlla difficultate inſtitui poteſt. Quin etiam in genere ipſe hic terminus generalis per fractionem $\frac{P}{Q}$ commode exprimi poterit, ſumendo $q = a$; $p = c$; $m = n b$; ita vt incrementum ſucceſſiuum, quod erat n, nunc ſit b, vnde ambae formulae integrales ita ſe habebunt:

$$P = \int \frac{x^{c-1} \partial x}{(1 - x^b)^{1-n}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{a-1} \partial x}{(1 - x^b)^{1-n}};$$

ſicque his caſibus ſemper terminum generalem per binas formulas integrales, ideoque modo finito ac determinato, exprimere licebit, neque interpolatio nouas quadraturas poſtulat, quemadmodum in caſibus ſupra tractatis vſu venit.

DE

DE ITERATA INTEGRATIONE FORMVLARVM INTEGRALIVM DVM ALIQVIS EXPONENS PRO VARIABILI ASSVMITVR.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 19 Aug. 1776.

Problema 1.

Cum ſit $\int x^{\theta-1}\partial x \left[\begin{array}{l} ab\ x=0 \\ ad\ x=1 \end{array}\right] = \frac{1}{\theta}$, *hanc formulam denuo integrare, ſumto exponente* θ *variabili.*

Solutio.

§. 1. Quoniam hic de integratione agitur, ut ea determinetur, integrale ita capi aſſumamus, ut evaneſcat certo caſu, poſito ſcilicet $\theta=\alpha$. Multiplicetur ergo utrinque per elementum $\partial\theta$, et integratione juxta hanc legem inſtituta pro parte dextra habebimus $\int\frac{\partial\theta}{\theta}=l\theta-l\alpha=l\frac{\theta}{\alpha}$. At pro parte ſiniſtra notum eſt, hanc integrationem a ſigno ſummatorio $\int$ penitus non turbari, et quia jam ſola littera θ pro variabili habetur, $\frac{\partial x}{x}$ vero ut conſtans ſpectatur, ob $x^{\theta-1}\partial x=\frac{\partial x}{x}x^{\theta}$, habebimus

$\int$

$$\int x^\theta \partial \theta = \frac{x^\theta}{l x} - \frac{x^\alpha}{l x};$$

quo valore ſubſtituto membrum ſiniſtrum erit

$$\int \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{x^\theta - x^\alpha}{l x},$$

quamobrem iſta integratio iterata nos perducit ad hanc aequationem:

$$\int \frac{x^{\theta - 1} - x^{\alpha - 1}}{l x} \partial x \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = l \frac{\theta}{\alpha}.$$

Corollarium 1.

§. 2. Si eodem modo formula integralis

$$\int x^{n + \theta - 1} \partial x \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{n + \theta}$$

denuo integretur, ſumto θ variabili, reperietur haec aequatio integrata:

$$\int (x^{n + \theta - 1} - x^{n + \alpha - 1}) \frac{\partial x}{l x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = l \frac{n + \theta}{n + \alpha}.$$

At ſi θ negatiue capiatur, tum etiam α negatiue accipi debebit, vnde aequatio denuo integrata haec prodibit:

$$\int (x^{n - \theta - 1} - x^{n - \alpha - 1}) \frac{\partial x}{l x} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = l \frac{n - \theta}{n - \alpha}.$$

Corollarium 2.

§. 3. Hic igitur notentur iſtae integrationes, quas in parte ſiniſtra inſtitui oportet, et quibus pro aliis formulis in poſterum erit vtendum, vbi ſemper aſſumamus, integralia ita capi debere, vt euaneſcant poſito $\theta = \alpha$. Primo ſcilicet erit

$$\int x^\theta \partial \theta = \frac{x^\theta - x^\alpha}{l x}.$$

Praeterea vero ſimili modo

$$\int x^{n+\theta} \partial \theta = \frac{x^{n+\theta} - x^{n+\alpha}}{l x};$$

atque hinc porro intelligitur fore

$$\int x^{n+\lambda\theta} \partial \theta = \frac{x^{n+\lambda\theta} - x^{n+\lambda\alpha}}{\lambda l x},$$

vnde patet, ſi λ capiatur negative, fore

$$\int x^{n-\lambda\theta} \partial \theta = \frac{x^{n-\lambda\theta} - x^{n-\lambda\alpha}}{-\lambda l x}.$$

Problema 2.

Cum ſit, vti jam ſaepius eſt oſtenſum,

$$\int \frac{x^{\theta-1} \partial x}{1 + x^\nu} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \infty \end{bmatrix} = \frac{\pi}{\nu \operatorname{ſin.} \frac{\theta\pi}{\nu}},$$

hanc aequationem denuo integrare, ſumto exponente θ pro variabili.

Solutio.

§. 4. Perpetuo hic, vt hactenus, integralia ita accipi ſtatuamus, vt evaneſcant poſito $\theta = \alpha$; quo obſervato pro parte dextra habebimus $\int \frac{\pi \partial \theta}{\nu \operatorname{ſin.} \frac{\theta\pi}{\nu}}$, quae formula poſito $\frac{\theta\pi}{\nu} = \Phi$ abit in hanc: $\int \frac{\partial \Phi}{\operatorname{ſin.} \Phi}$, cujus integrale novimus eſſe $l \operatorname{tang.} \frac{1}{2}\Phi$; quamobrem adjecta debita conſtante pro hac parte habebimus

$$\int \frac{\pi \partial \theta}{\nu \operatorname{ſin.} \frac{\theta\pi}{\nu}} = l \operatorname{tang.} \frac{\theta\pi}{2\nu} - l \operatorname{tang.} \frac{\alpha\pi}{2\nu} = l \frac{\operatorname{tang.} \frac{\theta\pi}{2\nu}}{\operatorname{tang.} \frac{\alpha\pi}{2\nu}}.$$

Pro

Digitized by Google

Pro parte autem ſiniſtra, vbi ſolus factor $x^{\theta-1}$ eſt variabilis, erit

$$\int x^{\theta-1}\,\partial\theta = \frac{x^{\theta-1} - x^{\alpha-1}}{l\,x}.$$

Hoc igitur valore introducto formula noſtra integralis denuo integrata erit

$$\int \frac{\partial x\,(x^{\theta-1} - x^{\alpha-1})}{(1+x^{\nu})\,l\,x}\left[\begin{array}{l}\text{ab } x = 0\\ \text{ad } x = \infty\end{array}\right] = l\,\frac{\text{tang.}\frac{\theta\pi}{2\nu}}{\text{tang.}\frac{\alpha\pi}{2\nu}}.$$

Corollarium.

§. 5. Quodſi ergo ſumamus $\alpha = \frac{1}{2}\nu$, quoniam tang. $\frac{\pi}{4} = 1$, hoc caſu, ponendo potius $\nu = 2\alpha$, habebimus hanc aequationem integralem ſatis memorabilem:

$$\int \frac{\partial x\,(x^{\theta-1} - x^{\alpha-1})}{(1+x^{2\alpha})\,l\,x}\left[\begin{array}{l}\text{ab } x = 0\\ \text{ad } x = \infty\end{array}\right] = l\,\text{tang.}\,\frac{\theta\pi}{4\alpha}.$$

Problema 3.

Cum ſit, uti jam ſatis conſtat:

$$\int \frac{(x^{\theta-1} + x^{\nu-\theta-1})\,\partial x}{1+x^{\nu}}\left[\begin{array}{l}\text{ab } x = 0\\ \text{ad } x = 1\end{array}\right] = \frac{\pi}{\nu\,\text{ſin.}\frac{\theta\pi}{\nu}},$$

hanc aequationem denuo integrare per exponentem variabilem θ, ita vt integralia evaneſcant poſito $\theta = \alpha$.

Solutio.

§. 6. Multiplicando igitur per $\partial\theta$ et integrando, pro parte dextra, prorſus vt in praecedente problemate, habebimus

$$l\,\frac{\text{tang.}\frac{\theta\pi}{2\nu}}{\text{tang.}\frac{\alpha\pi}{2\nu}}.$$

Digitized by Google

Pro parte autem ſiniſtra, quia formula $\frac{\partial x}{1+x^\nu}$ eſt conſtans, et exponens θ in duobus terminis occurrit, pro priore termino habebimus

$$\int x^{\theta-1}\partial\theta = \frac{x^{\theta-1}-x^{\alpha-1}}{lx},$$

pro altero vero termino ex §. 3. habebimus

$$\int x^{\nu-\theta-1}\partial\theta = \frac{x^{\nu-\alpha-1}-x^{\nu-\theta-1}}{lx},$$

quibus valoribus ſubſtitutis orietur iſta noua integratio:

$$\int\frac{\partial x}{lx}\cdot\frac{x^{\theta-1}-x^{\alpha-1}+x^{\nu-\alpha-1}-x^{\nu-\theta-1}}{1+x^\nu}\begin{bmatrix}\text{ab } x=0\\ \text{ad } x=1\end{bmatrix} = l\frac{\text{tang. }\frac{\theta\pi}{2\nu}}{\text{tang. }\frac{\alpha\pi}{2\nu}}.$$

Corollarium 1.

§. 7. Iſta aequatio aliquanto ſuccinctius ita repraeſentari poteſt:

$$\int\frac{\partial x}{xlx}\frac{(x^\theta-x^\alpha+x^{\nu-\alpha}-x^{\nu-\theta})}{1+x^\nu}\begin{bmatrix}\text{ab } x=0\\ \text{ad } x=1\end{bmatrix} = l\frac{\text{tang. }\frac{\theta\pi}{2\nu}}{\text{tang. }\frac{\alpha\pi}{2\nu}}$$

vbi cum ſit $x^{\nu-\alpha}-x^{\nu-\theta}=x^{\nu-\alpha-\theta}(x^\theta-x^\alpha)$, iſta aequatio ita commodius per factores repraeſentari poterit:

$$\int\frac{\partial x}{xlx}\frac{(x^\theta-x^\alpha)(1+x^{\nu-\alpha-\theta})}{1+x^\nu}\begin{bmatrix}\text{ab } x=0\\ \text{ad } x=1\end{bmatrix} = l\frac{\text{tang. }\frac{\theta\pi}{2\nu}}{\text{tang. }\frac{\alpha\pi}{2\nu}}.$$

Corollarium 2.

§. 8. Quodſi hic capiamus $\theta=\nu-\alpha$, vt fiat $x^{\nu-\alpha-\theta}=1$, pro parte dextra erit tang. $\frac{(\nu-\alpha)\pi}{2\nu}$ = cotang. $\frac{\alpha\pi}{2\nu}$, vnde totum hoc membrum erit $2\,l$ cot. $\frac{\alpha\pi}{2\nu}$; quare cum pro parte ſiniſtra factor

factor $1 + x^{\nu-\alpha-\theta}$ evadat $= 2$, vtrinque per 2 dividendo habebimus

$$\int \frac{\partial x}{x\, l x} \cdot \frac{x^{\nu-\alpha} - x^{\alpha}}{1 + x^{\nu}} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = l \cot. \frac{\alpha\pi}{2\nu}.$$

Corollarium 3.

§. 9. Quodſi ſumamus $\nu = 2\alpha$, vt fiat tang. $\frac{\alpha\pi}{2\nu} = 1$, pro parte ſiniſtra factor $1 + x^{\nu-\alpha-\theta}$ abit in $1 + x^{\alpha-\theta}$, dum prior factor $x^{\theta} - x^{\alpha}$ ita repraeſentari poteſt: $x^{\theta}(1 - x^{\alpha-\theta})$; vnde amborum productum erit $x^{\theta}(1 - x^{2\alpha-2\theta})$, quamobrem integratio noſtra ita ſe habebit:

$$\int \frac{x^{\theta-1}\partial x}{l x} \cdot \frac{1 - x^{2\alpha-2\theta}}{1 + x^{2\alpha}} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = l \text{ tang. } \frac{\theta\pi}{4\alpha}.$$

Scholion.

§. 10. Iſtae integrationes eo majorem attentionem merentur, quod in iis tres exponentes α, θ, ν indefiniti occurrunt, quos ſingulos pro lubitu vtcunque determinare licet, ita vt iſtae formulae multo latius pateant, quam eae quas non ita pridem ex iisdem fundamentis derivavi.

Problema 4.

Cum ſit, vti jam abunde eſt demonſtratum,

$$\int \frac{x^{\theta-1} - x^{\nu-\theta-1}}{1 - x^{\nu}} \partial x \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{\pi}{\nu \text{ tang. } \frac{\theta\pi}{\nu}},$$

hanc formulam denuo integrare, ſumto exponente θ variabili, ita vt integralia evaneſcant poſito $\theta = \alpha$.

Digitized by Google

Solutio.

§. 11. Quodſi ergo hic per $\partial\theta$ multiplicemus, pro parte dextra habebimus $\frac{\pi\,\partial\theta}{\nu\,\mathrm{tang.}\frac{\theta\pi}{\nu}}$, quae formula, poſito $\frac{\pi\theta}{\nu}=\Phi$, abit in $\frac{\partial\Phi}{\mathrm{tang.}\,\Phi}=\frac{\partial\Phi\,\mathrm{coſ.}\,\Phi}{\mathrm{ſin.}\,\Phi}$, cujus integrale manifeſto eſt $l\,\mathrm{ſin.}\,\Phi$; quamobrem conſtanti debita adjecta, pro parte dextra habebimus

$$l\,\mathrm{ſin.}\frac{\theta\pi}{\nu}-l\,\mathrm{ſin.}\frac{\alpha\pi}{\nu}=l\frac{\mathrm{ſin.}\frac{\theta\pi}{\nu}}{\mathrm{ſin.}\frac{\alpha\pi}{\nu}},$$

Pro parte autem ſiniſtra, quae ita repraeſentetur:

$$\int\frac{\partial x}{x}\cdot\frac{x^{\theta}-x^{\nu-\theta}}{1-x^{\nu}},$$

habebimus

$$\int x^{\theta}\,\partial\theta=\frac{x^{\theta}-x^{\alpha}}{l\,x}\quad\text{et}$$

$$\int x^{\nu-\theta}\,\partial\theta=\frac{x^{\nu-\alpha}-x^{\nu-\theta}}{l\,x},$$

quibus valoribus ſubſtitutis orietur ſequens aequatio integrata:

$$\int\frac{\partial x}{x\,l\,x}\cdot\frac{(x^{\theta}-x^{\alpha}-x^{\nu-\alpha}+x^{\nu-\theta})}{1-x^{\nu}}\begin{bmatrix}\text{ab } x=0\\ \text{ad } x=1\end{bmatrix}=l\frac{\mathrm{ſin.}\frac{\theta\pi}{\nu}}{\mathrm{ſin.}\frac{\alpha\pi}{\nu}}$$

vbi iterum tres exponentes indefiniti occurrunt, α, θ, ν.

Corollarium 1.

§. 12. Cum ſit, vti jam ante obſeruauimus,

$$x^{\nu-\alpha}-x^{\nu-\theta}=x^{\nu-\alpha-\theta}(x^{\theta}-x^{\alpha}),$$

formula noſtra commodius ita per factores exprimi poterit:

$$\int\frac{\partial x}{x\,l\,x}\cdot\frac{(x^{\theta}-x^{\alpha})(1-x^{\nu-\alpha-\theta})}{1-x^{\nu}}\begin{bmatrix}\text{ab } x=0\\ \text{ad } x=1\end{bmatrix}=l\frac{\mathrm{ſin.}\frac{\theta\pi}{\nu}}{\mathrm{ſin.}\frac{\alpha\pi}{\nu}},$$

vbi

Digitized by Google

vbi ſi ſumeremus $\nu = \alpha + \theta$, membrum ſiniſtrum evaneſceret, dextrum autem manifeſto quoque evaneſceret.

Corollarium 2.

§. 13. Quodſi autem hic ſumamus $\nu = 2\alpha$, pro dextra foret ſin. $\frac{\alpha\pi}{\nu} = 1$, vnde hoc caſu formula noſtra integralis erit

$$\int \frac{\partial x}{x\,l\,x} \cdot \frac{(x^\theta - x^\alpha)(1 - x^{\alpha - \theta})}{1 - x^{2\alpha}} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = l\,\text{ſin.}\,\frac{\theta\pi}{2\alpha},$$

quae forma evidenter in hanc contrahitur:

$$\int \frac{x^{\theta - 1}\partial x}{l\,x} \cdot \frac{(1 - x^{\alpha - \theta})^2}{1 - x^{2\alpha}} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = l\,\text{ſin.}\,\frac{\theta\pi}{2\alpha}.$$

Scholion.

§. 14. Has igitur egregias integrationes deduximus ex formulis integralibus jam pridem erutis, quatenus in iis exponentes indefiniti occurrunt; quod ſi ergo aliae hujusmodi formulae integrales inſuper innoteſcerent, eas ſimili modo tractare liceret; verum hactenus nullae tales formulae ſunt inventae quae ad hunc ſcopum accommodari poſſunt, quam ob cauſam integrationes hic exhibitae ſumma attentione Geometrarum dignae ſunt exiſtimandae.

Additamentum.

§. 15. Cum nuper oſtendiſſem hujus formulae integralis

$$\int \frac{x^{a - 1}\partial x}{l\,x} \cdot \frac{(1 - x^b)(1 - x^c)}{1 - x^n}$$

a termino $x = 0$ ad terminum $x = 1$ extenſae valorem ita exprimi, vt ſit $l\frac{P}{Q}$, exiſtente

P

$$P = \int \frac{x^{a+b-1}\,\partial x}{(1-x^n)^{1-\frac{c}{n}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{a-1}\,\partial x}{(1-x^n)^{1-\frac{c}{n}}}$$

quae integralia denuo ab $x = 0$ ad $x = 1$ ſunt extendenda: manifeſtum eſt in hac forma generali pleraſque integrationes ſupra inuentas contineri; quamobrem cum illis caſibus valores integralium abſolute exprimantur, operae pretium erit iſtam formam generalem ad illos caſus applicare, vt relatio inter binas formulas integrales P et Q inde innoteſcat. Problema quidem primum et ſecundum huc plane non pertinent. Ex problemate igitur tertio et quarto eos perſcrutemur caſus, quos ad formam noſtram generalem reuocare licet.

Euolutio formulae integralis ſupra §. 8. inuentae.

$$\int \frac{\partial x}{x\,l\,x} \cdot \frac{x^{\nu-\alpha} - x^{\alpha}}{1 + x^{\nu}} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = \nu \end{bmatrix} = l \operatorname{cof.} \frac{\alpha\pi}{2\nu}.$$

§. 16. Quoniam hic denominator eſt $1 + x^{\nu}$, vt is ad formam generalem reducatur, multiplicetur fractio ſupra et infra per $1 - x^{\nu}$, et formula iſta integralis hanc induet formam:

$$\int \frac{\partial x}{x\,l\,x} \cdot \frac{(x^{\nu-\alpha} - x^{\alpha})(1 - x^{\nu})}{1 - x^{2\nu}}.$$

Hic ante omnia diſpiciendum eſt, vter exponentium $\nu - \alpha$ et α ſit major, vnde duos caſus evolvi conveniet, prouti fuerit vel $\nu - \alpha < \alpha$, hoc eſt $\nu < 2\alpha$, vel $\nu - \alpha > \alpha$, hoc eſt $\nu > 2\alpha$.

§. 17. Sit igitur primo $\nu < 2\alpha$, ſeu $\alpha > \frac{1}{2}\nu$, atque formula integralis ita repraeſentari poterit:

$$\int \frac{x^{\nu-\alpha-1}\,\partial x}{l\,x} \cdot \frac{(1 - x^{2\alpha-\nu})(1 - x^{\nu})}{1 - x^{2\nu}}.$$

Hinc jam comparatione cum forma generali inſtituta manifeſto habebimus $a = \nu - \alpha$, $b = 2\alpha - \nu$ et $c = \nu$, denique $n = 2\nu$, ex quibus valoribus formabuntur ſequentes formulae:

P

$$P = \int \frac{x^{\alpha - 1} \partial x}{\sqrt{(1 - x^{2\nu})}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{\nu - \alpha - 1} \partial x}{\sqrt{(1 - x^{2\nu})}}.$$

Ponere etiam potuiſſemus $b = \nu$ et $c = 2\alpha - \nu$, manentibus $a = \nu - \alpha$ et $n = 2\nu$, hincque prodiiſſent valores

$$P = \int \frac{x^{2\nu - \alpha - 1} \partial x}{(1 - x^{2\nu})^{\frac{3\nu - 2\alpha}{2\nu}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{\nu - \alpha - 1} \partial x}{(1 - x^{2\nu})^{\frac{3\nu - 2\alpha}{2\nu}}},$$

vtrinque autem erit $l\frac{P}{Q} = l\cot.\frac{\alpha\pi}{2\nu}$.

§. 18. Hinc igitur duas nanciſcimur integrationes notatu digniſſimas. Cum enim ſit $\frac{P}{Q} = \cot.\frac{\alpha\pi}{2\nu}$, hae duae integrationes ita ſe habebunt:

$$\text{I. } \int \frac{x^{\alpha - 1} \partial x}{\sqrt{1 - x^{2\nu}}} : \int \frac{x^{\nu - \alpha - 1} \partial x}{\sqrt{1 - x^{2\nu}}} = \cot.\frac{\alpha\pi}{2\nu};$$

$$\text{II. } \int \frac{x^{2\nu - \alpha - 1} \partial x}{(1 - x^{2\nu})^{\frac{3\nu - 2\alpha}{2\nu}}} : \int \frac{x^{\nu - \alpha - 1} \partial x}{(1 - x^{2\nu})^{\frac{3\nu - 2\alpha}{2\nu}}} = \cot.\frac{\alpha\pi}{2\nu}.$$

§. 19. Sin autem fuerit $\nu > 2\alpha$, ipſa formula generalis mutatis ſignis ita debet repraeſentari:

$$\int \frac{\partial x}{x\,l\,x} \cdot \frac{(x^{\alpha} - x^{\nu - \alpha})(1 - x^{\nu})}{1 - x^{2\nu}} = l\,\text{tang.}\frac{\alpha\pi}{2\nu},$$

cui aequationi nunc induamus hanc formam:

$$\int \frac{x^{\alpha - 1} \partial x}{l\,x} \cdot \frac{(1 - x^{\nu - 2\alpha})(1 - x^{\nu})}{1 - x^{2\nu}}$$

vnde iam manifeſto habemus $a = \alpha$, $b = \nu - 2\alpha$, $c = \nu$, atque $n = 2\nu$, vnde deducuntur iſti valores:

$$P = \int \frac{x^{\nu - \alpha - 1} \partial x}{\sqrt{(1 - x^{2\nu})}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{\alpha - 1} \partial x}{\sqrt{(1 - x^{2\nu})}}.$$

Sin autem ſumamus $c = \nu - 2\alpha$ et $b = \nu$, manente $a = \alpha$ et

Digitized by Google

$n = 2\nu$, reperietur

$$P = \int \frac{x^{\alpha+\nu-1}\partial x}{(1-x^{2\nu})^{\frac{\nu+2\alpha}{2\nu}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{\alpha-1}\partial x}{(1-x^{2\nu})^{\frac{\nu+2\alpha}{2\nu}}}.$$

§. 20. Cum nunc utrinque ſit $l\frac{P}{Q} = l\,\text{tang.}\,\frac{\alpha\pi}{2\nu}$ ideoque $\frac{P}{Q} = \text{tang.}\,\frac{\alpha\pi}{2\nu}$, hinc adipiſcimur iterum has duas integrationes:

$$\text{III.} \int \frac{x^{\nu-\alpha-1}\partial x}{\surd\, 1 - x^{2\nu}} : \int \frac{x^{\alpha-1}\partial x}{\surd\, 1 - x^{2\nu}} = \text{tang.}\,\frac{\alpha\pi}{2\nu},$$

quae quidem conuenit cum priore antecedentium, ſiquidem formulae P et Q tantum inter ſe permutantur; altera vero integratio eſt noua, ſcilicet

$$\text{IV.} \int \frac{x^{\alpha+\nu-1}\partial x}{(1-x^{2\nu})^{\frac{\nu+2\alpha}{2\nu}}} : \int \frac{x^{\alpha-1}\partial x}{(1-x^{2\nu})^{\frac{\nu+2\alpha}{2\nu}}} = \text{tang.}\,\frac{\alpha\pi}{2\nu}.$$

Euolutio formulae integralis §. 9. allatae:

$$\int \frac{x^{\theta-1}\partial x}{l\,x} \cdot \frac{1 - x^{2\alpha-2\theta}}{1 + x^{2\alpha}} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = l\,\text{tang.}\,\frac{\theta\pi}{4\alpha}.$$

§. 21. Quo haec expreſſio ad formam praeſcriptam reducatur, multiplicetur ſupra et infra per $1 - x^{2\alpha}$, vt habeamus hanc formam:

$$\int \frac{x^{\theta-1}\partial x}{l\,x} \cdot \frac{(1 - x^{2\alpha-2\theta})(1 - x^{2\alpha})}{1 - x^{4\alpha}} = l\,\text{tang.}\,\frac{\theta\pi}{4\alpha},$$

quae ſponte ad formam generalem reuocatur, ſumendo $a = \theta$, $b = 2\alpha - 2\theta$, $c = 2\alpha$ et $n = 4\alpha$, ſi modo fuerit $\alpha > \theta$. Si enim fuerit $\theta > \alpha$, alio modo comparatio inſtitui debet, vti deinceps videbimus. Ex his autem valoribus conficietur

$$P = \int \frac{x^{2\alpha-\theta-1}\partial x}{\surd(1 - x^{4\alpha})} \text{ et } Q = \int \frac{x^{\theta-1}\partial x}{\surd(1 - x^{4\alpha})},$$

vnde

vnde ergo deducitur

$$\text{V.}\quad \int \frac{x^{2\alpha-\theta-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^{4\alpha})}} : \int \frac{x^{\theta-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^{4\alpha})}} = \text{tang.}\frac{\theta\pi}{4\alpha}.$$

§. 22. Poſſumus etiam valores litterarum b et c inter ſe permutare, vt ſit $b = 2\alpha$ et $c = 2\alpha - 2\theta$, manentibus $a = \theta$ et $n = 4\alpha$; tum autem fiet

$$P = \int \frac{x^{2\alpha+\theta-1}\partial x}{(1-x^{4\alpha})^{\frac{\alpha+\theta}{2\alpha}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{\theta-1}\partial x}{(1-x^{4\alpha})^{\frac{\alpha+\theta}{2\alpha}}},$$

hincque deducitur reductio

$$\text{VI.}\quad \int \frac{x^{2\alpha+\theta-1}\partial x}{(1-x^{4\alpha})^{\frac{\alpha+\theta}{2\alpha}}} : \int \frac{x^{\theta-1}\partial x}{(1-x^{4\alpha})^{\frac{\alpha+\theta}{2\alpha}}} = \text{tang.}\frac{\theta\pi}{4\alpha},$$

quae autem, aeque ac praecedens, locum non habet, niſi ſit $\alpha > \theta$.

§. 23. Quod ſi autem θ ſuperet α, aequationem noſtram in aliam formam transfundi oportet, ſigna vtrinque mutando, vnde prodibit

$$\int \frac{x^{2\alpha-\theta-1}\partial x}{l\,x} \cdot \frac{(1-x^{2\theta-2\alpha})(1-x^{2\alpha})}{1-x^{4\alpha}} = l\,\text{cot.}\frac{\theta\pi}{4\alpha}.$$

Hic iam iterum duplex comparatio inſtitui poteſt: primo ſcilicet ſumamus $a = 2\alpha - \theta$, $b = 2\theta - 2\alpha$, $c = 2\alpha$ et $n = 4\alpha$, vnde formamus

$$P = \int \frac{x^{\theta-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^{4\alpha})}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{2\alpha-\theta-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^{4\alpha})}}$$

hincque oritur ſeptima relatio haec:

$$\text{VII.}\quad \int \frac{x^{\theta-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^{4\alpha})}} : \int \frac{x^{2\alpha-\theta-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^{4\alpha})}} = \text{cot.}\frac{\theta\pi}{4\alpha},$$

quae manifeſto cum quinta congruit.

Digitized by Google

§. 24. Noua autem reductio obtinebitur, ſi ſtatuamus $b = 2\alpha$ et $c = 2\theta - 2\alpha$, manentibus $a = 2\alpha - \theta$ et $n = 4\alpha$; tum igitur erit

$$P = \int \frac{x^{4\alpha-\theta-1}\,\partial x}{(1-x^{4\alpha})^{\frac{3\alpha-\theta}{2\alpha}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{2\alpha-\theta-1}\,\partial x}{(1-x^{4\alpha})^{\frac{3\alpha-\theta}{2\alpha}}}.$$

Hinc vero colligitur reductio octaua

$$\text{VIII.} \int \frac{x^{4\alpha-\theta-1}\,\partial x}{(1-x^{4\alpha})^{\frac{3\alpha-\theta}{2\alpha}}} : \int \frac{x^{2\alpha-\theta-1}\,\partial x}{(1-x^{4\alpha})^{\frac{3\alpha-\theta}{2\alpha}}} = \cot.\frac{\theta\pi}{4\alpha}.$$

§. 25. Hic autem probe notandum eſt, quaternas poſteriores reductiones ex quatuor prioribus oriri, ſi in iſtis loco α ſcribatur θ, at 2α loco ν, ita vt quatuor poſteriores reductiones iam in prioribus contineantur; quamobrem ſiue quatuor priores, ſiue poſteriores, penitus omittere licebit, ita vt nobis tantum quatuor relinquantur, inter quas porro, quoniam tertia non diſcrepat a prima, tantum tres ſupererunt huiusmodi reductiones, quae quidem ex problemate tertio ſunt natae.

Euolutio formulae integralis §. 12. allatae:

$$\int \frac{\partial x}{x\,l\,x} \cdot \frac{(x^{\theta}-x^{\alpha})(1-x^{\nu-\alpha-\theta})}{1-x^{\nu}} \begin{bmatrix}\text{ab } x=0\\ \text{ad } x=1\end{bmatrix} = l\,\frac{\text{ſin.}\frac{\theta\pi}{\nu}}{\text{ſin.}\frac{\alpha\pi}{\nu}}.$$

§. 26. Iſta expreſſio iam congruit cum forma noſtra generali, neque idcirco vlteriori transformatione indiget. Hic quidem duo caſus eſſent diſtinguendi, prouti fuerit vel $\theta > \alpha$, vel $\theta < \alpha$; verum hac etiam diſtinctione carere poſſumus, propterea quod binae litterae α et θ inter ſe ſunt permutabiles: iis enim permutatis ſigna vtrinque inuertuntur. Hanc ob cauſſam, quoscunque valores habuerint ambae litterae α et θ, minorem ſemper littera θ, maiorem vero littera α deſignare licebit, vnde aequatio noſtra ita repraeſentabitur:

Digitized by Google

$$\int \frac{x^{\theta-1}\partial x}{lx} \cdot \frac{(1-x^{\alpha-\theta})(1-x^{\nu-\alpha-\theta})}{1-x^{\nu}} = l\frac{\text{ſin.}\frac{\theta\pi}{\nu}}{\text{ſin.}\frac{\alpha\pi}{\nu}}.$$

§. 27. Nihilo vero minus duo caſus diſtinguendi etiam hic occurrunt, prouti fuerit vel $\nu > \alpha+\theta$, vel $\nu < \alpha+\theta$. Sit igitur primo $\nu > \alpha+\theta$, et forma expoſita manebit inuariata, quae denuo duplicem comparationem cum generali admittit. Primo igitur ſtatuamus $a=\theta$, $b=\alpha-\theta$, $c=\nu-\alpha-\theta$ et $n=\nu$, qui valores nobis ſuppeditant

$$P=\int \frac{x^{\alpha-1}\partial x}{(1-x^{\nu})^{\frac{\alpha+\theta}{\nu}}} \text{ et } Q=\int \frac{x^{\theta-1}\partial x}{(1-x^{\nu})^{\frac{\alpha-\theta}{\nu}}}$$

ſicque ex hac euolutione habebimus ſequentem reductionem:

$$\text{I. } \int \frac{x^{\alpha-1}\partial x}{(1-x^{\nu})^{\frac{\alpha+\theta}{\nu}}} : \int \frac{x^{\theta-1}\partial x}{(1-x^{\nu})^{\frac{\alpha+\theta}{\nu}}} = \frac{\text{ſin.}\frac{\theta\pi}{\nu}}{\text{ſin.}\frac{\alpha\pi}{\nu}}.$$

§. 28. Secunda naſcetur reductio permutandis litteris b et c, ita vt ſit $a=\theta$, $b=\nu-\alpha-\theta$, $c=\alpha-\theta$, et $n=\nu$, vnde formantur hae formulae:

$$P=\int \frac{x^{\nu-\alpha-1}\partial x}{(1-x^{\nu})^{\frac{\nu-\alpha+\theta}{\nu}}} \text{ et } Q=\int \frac{x^{\theta-1}\partial x}{(1-x^{\nu})^{\frac{\nu-\alpha+\theta}{\nu}}}$$

quare ſecunda reductio hinc orta erit

$$\text{II. } \int \frac{x^{\nu-\alpha-1}\partial x}{(1-x^{\nu})^{\frac{\nu-\alpha+\theta}{\nu}}} : \int \frac{x^{\theta-1}\partial x}{(1-x^{\nu})^{\frac{\nu-\alpha+\theta}{\nu}}} = \frac{\text{ſin.}\frac{\theta\pi}{\nu}}{\text{ſin.}\frac{\alpha\pi}{\nu}},$$

quae duae reductiones poſtulant vt ſit $\nu > \alpha+\theta$.

§. 29. Sin autem fuerit $\nu < \alpha+\theta$, ipſa aequationis forma hoc modo immutari debebit:

$$\int \frac{x^{\nu-\alpha-1}\partial x}{lx} \cdot \frac{(1-x^{\alpha-\theta})(1-x^{\alpha+\theta-\nu})}{1-x^{\nu}} = l\frac{\text{ſin.}\frac{\alpha\pi}{\nu}}{\text{ſin.}\frac{\theta\pi}{\nu}}$$

 vbi

Digitized by Google

vbi iterum gemina comparatio inſtitui poteſt. Sit igitur primo $a = \nu - \alpha$, $b = \alpha - \theta$, $c = \alpha + \theta - \nu$ et $n = \nu$, vnde oriuntur hae formulae:

$$P = \int \frac{x^{\nu - \theta - 1}\,\partial x}{(1 - x^\nu)^{\frac{2\nu - \alpha - \theta}{\nu}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{\nu - \alpha - 1}\,\partial x}{(1 - x^\nu)^{\frac{2\nu - \alpha - \theta}{\nu}}}.$$

Hinc igitur concluditur tertia reductio:

$$\text{III. } \int \frac{x^{\nu - \theta - 1}\,\partial x}{(1 - x^\nu)^{\frac{2\nu - \alpha - \theta}{\nu}}} : \int \frac{x^{\nu - \alpha - 1}\,\partial x}{(1 - x^\nu)^{\frac{2\nu - \alpha - \theta}{\nu}}} = \frac{\text{ſin.}\,\frac{\alpha\pi}{\nu}}{\text{ſin.}\,\frac{\theta\pi}{\nu}}.$$

§. 30. Denique ſtatuamus $a = \nu - \alpha$, $b = \alpha + \theta - \nu$, $c = \alpha - \theta$ et $n = \nu$, et formulae hinc ſequentes naſcentur:

$$P = \int \frac{x^{\theta - 1}\,\partial x}{(1 - x^\nu)^{\frac{\nu - \alpha + \theta}{\nu}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{\nu - \alpha - 1}\,\partial x}{(1 - x^\nu)^{\frac{\nu - \alpha + \theta}{\nu}}}$$

ita vt quarta hinc oriatur reductio:

$$\text{IV. } \int \frac{x^{\theta - 1}\,\partial x}{(1 - x^\nu)^{\frac{\nu - \alpha + \theta}{\nu}}} : \int \frac{x^{\nu - \alpha - 1}\,\partial x}{(1 - x^\nu)^{\frac{\nu - \alpha + \theta}{\nu}}} = \frac{\text{ſin.}\,\frac{\alpha\pi}{\nu}}{\text{ſin.}\,\frac{\theta\pi}{\nu}}.$$

§. 31. Quatuor igitur hic nacti ſumus formularum integralium paria, quae eandem inter ſe tenent rationem ac ſinus duorum angulorum; dum euolutiones praecedentes tantum tria huiusmodi paria praebuerant, quarum ratio P:Q tangenti cuiuspiam anguli aequatur, vbi quidem euidens eſt ſecundam et quartam inter ſe conuenire. Cum igitur huiusmodi reductiones altioris ſint indaginis, ac ſine dubio inſignem vſum habere queant, opere pretium erit eas clarius ob oculos exponere.

Problema.

§. 32. *Inuenire binas formulas integrales P et Q ab $x = 0$ ad $x = 1$ extenſas, vt fiat* $\frac{P}{Q} = \text{tang.}\,\frac{m\pi}{2n}$.

So-

Solutio.

Triplici igitur modo hoc fieri poteſt, ſecundum euolutionem primam ſupra inſtitutam. I. Ex prima enim reductione, cum ſit cot. $\frac{\alpha\pi}{2\nu} = $ tang. $\frac{(\nu-\alpha)\pi}{2\nu}$, fiet $\nu - \alpha = m$ et $\nu = n$, ita vt ſit $\alpha = n - m$. Hinc igitur erit

$$P = \int \frac{x^{n-m-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^{2n})}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{m-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^{2n})}},$$

quae ergo eſt ſolutio prima. II. Secunda reductio ſupra allata erat $\frac{P}{Q} = $ cot. $\frac{\alpha\pi}{2\nu} = $ tang. $\frac{(\nu-\alpha)\pi}{2\nu}$, vbi ergo iterum eſt $\alpha = n - m$ et $\nu = n$, ſicque ſecunda ſolutio huius problematis conſtabit his formulis:

$$P = \int \frac{x^{m+n-1}\partial x}{(1-x^{2n})^{\frac{2m+n}{2n}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{m-1}\partial x}{(1-x^{2n})^{\frac{2m+n}{2n}}}.$$

Hae autem formulae tantum valent, quando fuerit $m < \frac{1}{2}a$, ideoque ipſe angulus $\frac{m\pi}{2n}$ minor ſemirecto. III. Quoniam tertia reductio ibi allata cum prima conuenit, ex quarta, vbi erat $\frac{P}{Q} = $ tang. $\frac{\alpha\pi}{2\nu}$, ideoque pro noſtro caſu $\alpha = m$ et $\nu = n$, tertia ſolutio ita ſe habebit:

$$P = \int \frac{x^{m+n-1}\partial x}{(1-x^{2n})^{\frac{2m+n}{2n}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{m-1}\partial x}{(1-x^{2n})^{\frac{2m+n}{2n}}},$$

qui valores quoniam a praecedentibus non ſunt diuerſi, duas tantum adipiſcimur ſolutiones noſtri problematis, quarum ſecunda limitatione quadam indiget, ſcilicet $m < \frac{1}{2}n$, prior vero ad omnes angulos recto non maiores patet. Hae ergo duae ſolutiones ita repraeſententur:

$$\text{I. } P = \int \frac{x^{n-m-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^{2n})}}, \quad Q = \int \frac{x^{m-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^{2n})}},$$

II.

Digitized by Google

$$\text{II. } P = \int \frac{x^{m+n-1}\partial x}{(1-x^{2n})^{\frac{2m+n}{2n}}},\quad Q = \int \frac{x^{m-1}\partial x}{(1-x^{2n})^{\frac{2m+n}{2n}}};$$

ex vtraque igitur erit $\frac{P}{Q} = \text{tang.}\,\frac{m\pi}{2n}$.

Problema.

§. 33. *Inuenire binas formulas integrales* P *et* Q, *vt fiat* $\frac{P}{Q} = \frac{\text{ſin}\,\frac{p\pi}{2n}}{\text{ſin.}\,\frac{q\pi}{2n}}$, *ſiquidem ambo illa integralia ab* $x = 0$ *ad* $x = 1$ *extendantur.*

Solutio.

Ad hanc igitur formam transferamus quatuor illas reductiones in euolutione tertia traditas, et cum pro prima et ſecunda eſſet $\frac{P}{Q} = \frac{\text{ſin.}\,\frac{\theta\pi}{\nu}}{\text{ſin.}\,\frac{\alpha\pi}{\nu}}$, pro forma hic praeſcripta erit $\theta = p$, $\alpha = q$ et $\nu = 2n$, quamobrem hinc nanciſcimur duas ſequentes ſolutiones:

$$\text{I. } P = \int \frac{x^{q-1}\partial x}{(1-x^{2n})^{\frac{p+q}{2n}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{p-1}\partial x}{(1-x^{2n})^{\frac{p+q}{2n}}},$$

$$\text{II. } P = \int \frac{x^{2n-q-1}\partial x}{(1-x^{2n})^{\frac{2n-q+p}{2n}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{p-1}\partial x}{(1-x^{2n})^{\frac{2n-q+p}{2n}}}.$$

Tertia vero et quarta reductio habebant $\frac{P}{Q} = \frac{\text{ſin.}\,\frac{\alpha\pi}{\nu}}{\text{ſin.}\,\frac{\theta\pi}{\nu}}$, pro qua igitur erit $\alpha = p$, $\theta = q$, $\nu = 2n$, vnde ambae ſolutiones ſequentes deducuntur:

$$\text{III. } P = \int \frac{x^{2n-q-1}\partial x}{(1-x^{2n})^{\frac{-p-q}{2n}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{2n-p-1}\partial x}{(1-x^{2n})^{\frac{4n-p-q}{2n}}};$$

IV.

$$\text{IV. } P = \int \frac{x^{q-1}\partial x}{(1-x^{2n})^{\frac{2n-p+q}{2n}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{2n-p-1}\partial x}{(1-x^{2n})^{\frac{2n-p+q}{2n}}}.$$

Hinc igitur patet quadruplici modo fieri poſſe $\frac{P}{Q} = \frac{\text{ſin.}\frac{p\pi}{2n}}{\text{ſin.}\frac{q\pi}{2n}}$.

Corollarium 1.

§. 34. Si aſſumamus $q = n$, vt fiat ſin. $\frac{q\pi}{2n} = 1$, ideoque prodire debeat $\frac{P}{Q} =$ ſin. $\frac{p\pi}{2n}$; pro hoc caſu quatuor inuentae ſolutiones dabunt

$$\text{I. } P = \int \frac{x^{n-1}\partial x}{(1-x^{2n})^{\frac{p+n}{2n}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{p-1}\partial x}{(1-x^{2n})^{\frac{p+n}{2n}}},$$

$$\text{II. } P = \int \frac{x^{n-1}\partial x}{(1-x^{2n})^{\frac{n+p}{2n}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{p-1}\partial x}{(1-x^{2n})^{\frac{n+p}{2n}}},$$

$$\text{III. } P = \int \frac{x^{n-1}\partial x}{(1-x^{2n})^{\frac{3n-p}{2n}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{2n-p-1}\partial x}{(1-x^{2n})^{\frac{3n-p}{2n}}},$$

$$\text{IV. } P = \int \frac{x^{n-1}\partial x}{(1-x^{2n})^{\frac{3n-p}{2n}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{2n-p-1}\partial x}{(1-x^{2n})^{\frac{3n-p}{2n}}},$$

vbi ergo ſolutio prima cum ſecunda et tertia cum quarta conuenit.

Corollarium 2.

§. 35. Sumamus nunc eſſe $q = n - p$, vt fiat ſin. $\frac{q\pi}{2n}$ = coſ. $\frac{p\pi}{2n}$, ideoque prodire debeat $\frac{P}{Q} =$ tang. $\frac{p\pi}{2n}$. Pro hoc ergo caſu quatuor ſolutiones inuentae euadent

$$\text{I. } P = \int \frac{x^{n-p-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^{2n})}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^{2n})}},$$

$$\text{II. } P = \int \frac{x^{n+p-1}\,\partial x}{(1-x^{2n})^{\frac{n+2p}{2n}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{p-1}\,\partial x}{(1-x^{2n})^{\frac{n+2p}{2n}}},$$

$$\text{III. } P = \int \frac{x^{n+p-1}\,\partial x}{(1-x^{2n})^{\frac{3}{2}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{2n-p-1}\,\partial x}{(1-x^{2n})^{\frac{3}{2}}},$$

$$\text{IV. } P = \int \frac{x^{n-p-1}\,\partial x}{(1-x^{2n})^{\frac{3n-2p}{2n}}} \text{ et } Q = \int \frac{x^{2n-p-1}\,\partial x}{(1-x^{2n})^{\frac{3n-2p}{2n}}},$$

hincque erit $\frac{P}{Q} = \text{tang.}\, \frac{p\pi}{2n}$,

vbi prima et ſecunda forma cum iis quas in praecedente problemate inuenimus prorſus conueniunt; tertia autem forma, ob $(1-x^{2n})^{\frac{3}{2}}$, fit incongrua, quia inde P et Q in infinitum excreſcerent; quarta autem nouam formam dare videtur.

METHO-

Digitized by Google

METHODVS FACILIS INUESTIGANDI RADIVM OSCVLI EX PRINCIPIO MAXIMORVM ET MINIMORVM PETITA.

Auctore

L. E V L E R O.

Conuent. exhib. die 11 *Sept.* 1776.

Problema.

Propoſita curua quacunque eius radium oſculi inuenire.

Solutio.

§. 1. Sit A Y curua propoſita, aequatioue quacunque inter binas coordinatas $AX = x$ et $XY = y$ expreſſa, ita vt y ſpectari poſſit tanquam certa functio ipſius x, vnde fiat $\partial y = p \partial x$; et quia p denuo certam functionem ipſius x deſignat, ſit porro $\partial p = q \partial x$, quibus poſitis inueſtigari proponitur radius oſculi huius curuae in puncto Y, ſiue quaeri debet punctum O, ex quo tanquam centro ſi deſcribatur circulus per Y tranſiens, hic circulus non ſolum curuam in Y tangat, ſed etiam communem habiturus ſit curuaturam, quo caſu is dicitur curuam oſculari, eiusque radius ſub nomine radii oſculi deſignari ſolet. Tab. I. fig. 3.

§. 2. Quodſi ad hanc curuam in Y ducatur normalis Y N, eius quodlibet punctum O hac gaudet proprietate, vt

L 2 eius

Digitized by Google

eius diſtantia O Y inuariata maneat, etiamſi punctum Y per interuallum infinite paruum promoueatur. Verum ſi punctum O fuerit centrum circuli oſculantis, quantitas interualli O Y non ſolum non variabitur, dum per differentialia prima procedimus, ſed etiam nullam variationem patietur, etiamſi per differentialia ſecunda procedamus; quamobrem ex hoc ipſo principio licebit iſtud centrum circuli oſculantis O determinare.

§. 3. Hunc in finem ex puncto hoc quaeſito O ad axem demittatur perpendiculum O P ac vocentur interualla $AP = f$ et $PO = g$, eritque $XP = f - x$; et ducta axi parallela O Q fiet interuallum $QY = y - g$, atque hinc colligitur $OY^2 = (f - x)^2 + (y - g)^2$, cuius ergo ante omnia differentiale primum debet annihilari, vnde ob $\partial y = p\,\partial x$ fiet

$$-2\,\partial x\,(f - x) + 2\,p\,\partial x\,(y - g) = 0, \text{ ſiue}$$

$$-f + x + p\,(y - g) = 0;$$

deinde vero etiam huius expreſſionis differentiale denuo ad nihilum reuocari debebit, vnde ob $\partial p = q\,\partial x$ orietur iſta aequatio:

$$\partial x + y\,\partial p + p\,\partial y - g\,\partial p = 0, \text{ ſiue}$$

$$1 + q\,(y - g) + p\,p = 0,$$

ex qua colligimus

$$g = y + \frac{1 + p\,p}{q}.$$

§. 4. At vero ex priore aequatione colligitur $f = x + p\,(y - g)$, vbi ſi loco g valor modo inuentus ſubſtituatur, prodibit $f = x - p\,\frac{(1 + p\,p)}{q}$; ſicque per ſola elementa ad curuam pertinentia, ſcilicet x, y, p et q, centrum circuli oſculantes O ita determinatur, vt ſit

$$AP = x - \frac{p\,(1 + p\,p)}{q} \text{ et } PO = y + \frac{1 + p\,p}{q}$$

quod ergo punctum nullam plane ambiguitatem inuoluit.

§. 5.

Digitized by Google

§. 5. Inuento autem puncto O longitudo radii oſculi nulla amplius laborat difficultate. Cum enim ſit $OQ = -\frac{p(1+pp)}{q}$ et $QY = -\frac{(1+pp)}{q}$ erit $OY^2 = \frac{(1+pp)^3}{qq}$ quod cum ſit quadratum radii oſculi, erit ipſe radius oſculi $= \pm \frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{q}$, quae eſt expreſſio notiſſima radii oſculi. Cum enim ſit $q = \frac{\partial p}{\partial x}$, erit radius oſculi $= \pm \partial x \frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{\partial p}$, vbi ambiguitas ſigni nihil turbat, quia locus puncti O iam ante eſt definitus.

§. 6. Hinc iam facile formulae vulgares pro radio oſculi dari ſolitae deduci poſſunt. Ac primo quidem cum ſit $\partial . \frac{p}{\sqrt{1+pp}} = \frac{\partial p}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$, ſi ponamus $\frac{p}{\sqrt{1+pp}} = t$, erit $\frac{\partial p}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = \partial t$, ex quo valore erit radius oſculi $= \frac{\partial x}{\partial t}$.

§. 7. Deinde etiam radius oſculi per ſola differentialia tam primi quam ſecundi gradus exprimi ſolet. Cum enim ſit $p = \frac{\partial y}{\partial x}$, erit $1+pp = \frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial x^2}$, ideoque $(1+pp)^{\frac{3}{2}} = \frac{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x^3}$; tum vero nullo differentiali pro conſtanti ſumpto erit $\partial p = \frac{\partial x \partial\partial y - \partial y \partial\partial x}{\partial x^2}$, quibus ſubſtitutis erit radius oſculi $= \frac{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x \partial\partial y - \partial y \partial\partial x}$.

§. 8. Sin autem elementum ∂x pro conſtanti accipiatur, fiet radius oſculi $= \frac{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x \partial\partial y}$; at ſi alterum elementum ∂y conſtans aſſumatur, fiet radius oſculi $= -\frac{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial y \partial\partial x}$.

§. 9. Quodſi porro elementum curuae in computum trahatur, idque vocetur $= \partial s$, vt ſit $\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2$, erit radius oſculi $= \frac{\partial s^3}{\partial x \partial\partial y - \partial y \partial\partial x}$, vbi nullum differentiale pro conſtanti eſt aſſumtum.

Digitized by Google

§. 10. Sin autem iſtud elementum curuae ∂s conſtans accipere velimus, erit $\partial s \partial \partial s = 0$, ideoque $\partial x \partial \partial x + \partial y \partial \partial y = 0$, ex qua aequatione fit primo $\partial \partial y = -\frac{\partial x \partial \partial x}{\partial y}$, ideoque denominator ille $\partial x \partial \partial y - \partial y \partial \partial x$ fiet $= -\frac{\partial \partial x (\partial x^2 + \partial y^2)}{\partial y} = -\frac{\partial s^2 \partial \partial x}{\partial y}$, ſicque hoc caſu radius oſculi erit $= -\frac{\partial y \partial s}{\partial \partial x}$.

§. 11. Simili modo cum ſit $\partial \partial x = -\frac{\partial y \partial \partial y}{\partial x}$, erit denominator

$$\partial x \partial \partial y - \partial y \partial \partial x = \frac{\partial \partial y (\partial x^2 + \partial y^2)}{\partial x} = \frac{\partial s^2 \partial \partial y}{\partial x},$$

vnde radius oſculi colligitur $= \frac{\partial x \partial s}{\partial \partial y}$. Hoc modo ſumto elemento ∂s conſtante duae habebuntur formulae pro radio oſculi, quae ſunt $-\frac{\partial s \partial y}{\partial \partial x}$ et $\frac{\partial s \partial x}{\partial \partial y}$.

OBSER-

Digitized by Google

OBSERUATIONES GENERALES

CIRCA SERIES, QVARVM TERMINI SECVNDVM SINVS VEL COSINVS ANGVLORVM MVLTIPLORVM PROGREDIVNTVR.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 6 Mart. 1776.

§. 1.

Quodſi huius ſeriei $A + Bx + Cxx + Dx^3 +$ etc. ſummatio fuerit cognita, ita vt, quicunque valor litterae x tribuatur, eius ſumma aſſignari queat, tum etiam ſemper tam ſumma huius ſeriei:

$$A + B\,\text{coſ.}\,\Phi + C\,\text{coſ.}\,2\Phi + D\,\text{coſ.}\,3\Phi + \text{etc.}$$

quam huius:

$$B\,\text{ſin.}\,\Phi + C\,\text{ſin.}\,2\Phi + D\,\text{ſin.}\,3\Phi + E\,\text{ſin.}\,4\Phi + \text{etc.}$$

exhiberi poterit. Cum enim ſumma primae ſeriei exprimatur per certam quandam functionem ipſius x, quam hoc charactere $\Delta : x$ deſignemus, ita vt ſit

$$\Delta : x = A + Bx + Cxx + Dx^3 + \text{etc.}$$

ſi loco x ſcribamus tam

$$\text{coſ.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi, \text{ quam } \text{coſ.}\,\Phi - \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi$$

ſum-

Digitized by Google

ſumma ſerierum inde reſultantium erit

$$2A + 2B\,\text{coſ.}\,\Phi + 2C\,\text{coſ.}\,2\Phi + 2D\,\text{coſ.}\,3\Phi + 2E\,\text{coſ.}\,4\Phi + \text{etc.}$$

cuius ergo ſumma erit

$$\Delta : (\text{coſ.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi) + \Delta : (\text{coſ.}\,\Phi - \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi);$$

ſin autem poſteriorem a priore ſubtrahamus, prodibit iſta ſeries:

$$2B\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi + 2C\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,2\Phi + 2D\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,3\Phi$$
$$+ 2E\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,4\Phi\ \text{etc.}$$

cuius ergo ſumma erit

$$\Delta : (\text{coſ.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi) - \Delta : (\text{coſ.}\,\Phi - \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi).$$

§. 2. Quo expreſſiones has commodiores reddamus, ſtatuamus breuitatis gratia

$$\text{coſ.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi = p;\ \text{coſ.}\,\Phi - \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi = q$$

eritque, vti in vulgus notum eſt, $p\,q = 1$ ideoque $q = \frac{1}{p}$; tum vero erit

$$\text{coſ.}\,\Phi = \frac{p+q}{2};\ \text{coſ.}\,2\Phi = \frac{pp+qq}{2};\ \text{coſ.}\,3\Phi = \frac{p^3+q^3}{2};$$
$$\text{coſ.}\,4\Phi = \frac{p^4+q^4}{2};\ \text{etc.}$$

Praeterea vero pro ſinibus habebitur

$$\text{ſin.}\,\Phi = \frac{p-q}{2\sqrt{-1}};\ \text{ſin.}\,2\Phi = \frac{pp-qq}{2\sqrt{-1}};\ \text{ſin.}\,3\Phi = \frac{p^3-q^3}{2\sqrt{-1}};\ \text{etc.}$$

quibus conſtitutis nanciſcimur has duas ſummationes:

$$A\,\text{coſ.}\,0\Phi + B\,\text{coſ.}\,\Phi + C\,\text{coſ.}\,2\Phi + D\,\text{coſ.}\,3\Phi + E\,\text{coſ.}\,4\Phi + \text{etc.}$$
$$= \frac{\Delta:p + \Delta:q}{2};\ \text{et}$$

$$A\,\text{ſin.}\,0\Phi + B\,\text{ſin.}\,\Phi + C\,\text{ſin.}\,2\Phi + D\,\text{ſin.}\,3\Phi + \text{etc.} = \frac{\Delta:p - \Delta:q}{2\sqrt{-1}}$$

§. 3. Sumamus nunc pro ſerie principali poteſtatem quamcunque Binomii euolutam, quae eſt

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.\ \ 2}x\,x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ \ 2.\ \ 3}x^3 + \text{etc.}$$

ita

ita vt hoc caſu ſit $\Delta : x = (1 + x)^n$; tum vero, vt hanc expreſſionem contrahamus, deſignemus ſingulos coefficientes, vt iam aliquoties fecimus, his characteribus: $(\frac{n}{0})$, $(\frac{n}{1})$, $(\frac{n}{2})$, $(\frac{n}{3})$, $(\frac{n}{4})$, ita vt ſit

$$(\tfrac{n}{0}) = 1,$$
$$(\tfrac{n}{1}) = n,$$
$$(\tfrac{n}{2}) = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2},$$
$$(\tfrac{n}{3}) = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3},$$
etc.

vbi obſeruaſſe iuuabit eſſe in genere $(\frac{n}{i}) = (\frac{n}{n-i})$, ideoque $(\frac{n}{n}) = (\frac{n}{0}) = 1$. Praeterea vero euidens eſt, quoties fuerit i vel numerus negatiuus, vel poſitiuus, maior quam n, tum ſemper eſſe $(\frac{n}{i}) = 0$, ſiquidem n fuerit numerus integer. His ergo obſeruatis habebimus hanc ſummationem principalem:

$$(1+x)^n = (\tfrac{n}{0}) + (\tfrac{n}{1})x + (\tfrac{n}{2})x^2 + (\tfrac{n}{3})x^3 + (\tfrac{n}{4})x^4 + \text{etc.}$$

vnde ergo per praecepta modo tradita deriuabimus binas ſequentes ſummationes:

$$(\tfrac{n}{0})\operatorname{coſ}.0\Phi + (\tfrac{n}{1})\operatorname{coſ}.\Phi + (\tfrac{n}{2})\operatorname{coſ}.2\Phi + (\tfrac{n}{3})\operatorname{coſ}.3\Phi + \text{etc.} = \frac{(1+p)^n + (1+q)^n}{2} \text{ et}$$

$$(\tfrac{n}{0})\operatorname{ſin}.0\Phi + (\tfrac{n}{1})\operatorname{ſin}.\Phi + (\tfrac{n}{2})\operatorname{ſin}.2\Phi + (\tfrac{n}{3})\operatorname{ſin}.3\Phi + \text{etc.} = \frac{(1+p)^n - (1+q)^n}{2\sqrt{-1}}.$$

Quouis autem caſu, quamquam formulae pro p et q aſſumptae ſunt imaginariae, tamen ſemper iſtas formulas ad valores reales reuocare licebit, quemadmodum in ſequentibus binis problematibus ſumus oſtenſuri.

Problema I.

Propoſita hac ſerie coſinuum:

$$1 + \frac{n}{1}\operatorname{coſ}.\Phi + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}\operatorname{coſ}.2\Phi + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}\operatorname{coſ}.3\Phi + \text{etc.} = s,$$

 ita

ita vt per characteres ſtabilitos ſit

$$s = (\tfrac{n}{0}) \cos. 0\Phi + (\tfrac{n}{1}) \cos. \Phi + (\tfrac{n}{2}) \cos. 2\Phi + (\tfrac{n}{3}) \cos. 3\Phi + \text{etc.}$$

eius ſummam realiter exprimere.

Solutio.

§. 4. Cum igitur ſit, vt modo vidimus

$$s = \frac{(1+p)^n + (1+q)^n}{2},$$

exiſtente $p = \cos.\Phi + \sqrt{-1} \sin.\Phi$ et $q = \cos.\Phi - \sqrt{-1} \sin.\Phi$, totum negotium huc redit, vt iſta expreſſio pro s exhibita ab imaginariis liberetur; euidens enim eſt, ſi formulae $(1+p)^n$ et $(1+q)^n$ actu euoluantur, tum imaginaria ſe ſponte eſſe deſtructura, quandoquidem hinc ipſa ſeries ſummanda exoritur; quam ob rem in aliam reſolutionem nobis erit inquirendum, vt ſine euolutione adhibita imaginaria e medio tollantur, id quod ſequenti modo fieri poterit.

§. 5. Cum ſit $pq = 1$, formula $1+p$ ita exprimi poterit, vt ſit $1+p = (\sqrt{p} + \sqrt{q}) \sqrt{p}$, ſimilique modo erit $1+q = (\sqrt{p} + \sqrt{q}) \sqrt{q}$, hisque valoribus introductis prodibit noſtra ſumma

$$s = \tfrac{1}{2} (\sqrt{p} + \sqrt{q})^n (p^{\frac{n}{2}} + q^{\frac{n}{2}}).$$

Cum iam in genere ſit $p^\alpha + q^\alpha = 2 \cos. \alpha\Phi$, erit

$$p^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}} = 2 \cos. \tfrac{1}{2}\Phi \text{ et } p^{\frac{n}{2}} + q^{\frac{n}{2}} = 2 \cos. \tfrac{1}{2} n\Phi,$$

quibus valoribus ſubſtitutis ſumma quaeſita iam realiter ſequenti modo exprimetur: $s = 2^n \cos. \tfrac{1}{2}\Phi^n \cos. \tfrac{1}{2} n\Phi$.

§. 6. Hoc igitur pacto ſummationem maxime memorabilem ſumus adepti, quae ita ſe habet, vt ſemper ſit

1 +

$$1 + \frac{n}{1} \operatorname{coſ.} \Phi + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \operatorname{coſ.} 2\Phi + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \operatorname{coſ.} 3\Phi + \text{etc.}$$
$$= 2^n \operatorname{coſ.} \tfrac{1}{2}\Phi^n \operatorname{coſ.} \tfrac{1}{2} n \Phi,$$

quae ſemper veritati eſt conſentanea, quicunque numeri pro n ſubſtituantur, ſiue integri ſiue fracti, ſiue etiam negatiui. Operae ergo pretium erit ex quouis genere caſus ſimpliciores ob oculos exponere.

Euolutio caſuum,

quibus exponens n eſt numerus integer poſitiuus.

§. 7. Conſideremus caſus ſequentes:

1°. Sit $n = 0$, et ipſa ſeries in vnitatem coaleſcit, ſumma autem erit $= 1$.

2°. Sit $n = 1$, et ſeries abibit in $1 + \operatorname{coſ.} \Phi$; ſumma autem inuenta praebet $2 \operatorname{coſ.} \frac{1}{2}\Phi^2$. Conſtat autem eſſe $2 \operatorname{coſ.} \frac{1}{2}\Phi^2 = 1 + \operatorname{coſ.} \Phi$.

3°. Sit $n = 2$, et ſeries abit in $1 + 2 \operatorname{coſ.} \Phi + \operatorname{coſ.} 2\Phi$; ſumma autem oritur $= 4 \operatorname{coſ.} \frac{1}{2}\Phi^2 \operatorname{coſ.} \Phi$. Modo autem vidimus eſſe $2 \operatorname{coſ.} \frac{1}{2}\Phi^2 = 1 + \operatorname{coſ.} \Phi$, quae forma per $2 \operatorname{coſ.} \Phi$ multiplicata producit

$$2 \operatorname{coſ.} \Phi \times 2 \operatorname{coſ.} \tfrac{1}{2}\Phi^2 = 1 + 2 \operatorname{coſ.} \Phi + \operatorname{coſ.} 2\Phi.$$

4°. Sit nunc $n = 3$, et ſeries naſcitur haec: $1 + 3 \operatorname{coſ.} \Phi + 3 \operatorname{coſ.} 2\Phi + \operatorname{coſ.} 3\Phi$, cuius ſumma eſt $= 8 \operatorname{coſ.} \frac{1}{2}\Phi^3 \operatorname{coſ.} \frac{3}{2}\Phi$, quae formula per reductiones ſatis cognitas ipſam ſeriem producit.

5°. Sit nunc $n = 4$, et ſeries abit in

$$1 + 4 \operatorname{coſ.} \Phi + 6 \operatorname{coſ.} 2\Phi + 4 \operatorname{coſ.} 3\Phi + \operatorname{coſ.} 4\Phi$$

cuius ergo ſumma erit $2^4 \operatorname{coſ.} \frac{1}{2}\Phi^4 \operatorname{coſ.} 2\Phi$, cuius veritas etiam non difficulter oſtenditur. Sicque ſemper veritatem per reductiones cognitas oſtendere licebit.

Euolutio caſuum,

quibus pro n numerus integer negatiuus accipitur.

§. 8. Statuamus 1°. $n = -1$, atque hinc naſcetur ſequens ſeries infinita:

$$1 - \text{coſ.}\,\Phi + \text{coſ.}\,2\,\Phi - \text{coſ.}\,3\,\Phi + \text{coſ.}\,4\,\Phi - \text{coſ.}\,5\,\Phi \text{ etc.}$$

in infinitum, cuius ergo ſumma per noſtram ſeriem generalem erit $\frac{\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\Phi}{2\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\Phi} = \frac{1}{2}$, quod quidem iam dudum a Geometris eſt obſeruatum. Quodſi enim haec ſeries, cuius ſumma tantiſper ponatur $= s$, ducatur in $2\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\Phi$, reperietur per reductiones notiſſimas

$$2s\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi = \left\{\begin{array}{l} 2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi - \text{coſ.}\tfrac{3}{2}\Phi + \text{coſ.}\tfrac{5}{2}\Phi - \text{coſ.}\tfrac{7}{2}\Phi + \text{coſ.}\tfrac{9}{2}\Phi \\ -\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi + \text{coſ.}\tfrac{3}{2}\Phi - \text{coſ.}\tfrac{5}{2}\Phi + \text{coſ.}\tfrac{7}{2}\Phi - \text{coſ.}\tfrac{9}{2}\Phi \end{array}\right\} \text{etc.}$$

quod manifeſto redit ad $2s\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\Phi = \text{coſ.}\,\frac{1}{2}\Phi$ ideoque $s = \frac{1}{2}$.

§. 9. Statuamus nunc $n = -2$, et ſeries orietur ſequens:

$$1 - 2\,\text{coſ.}\,\Phi + 3\,\text{coſ.}\,2\Phi - 4\,\text{coſ.}\,3\Phi + 5\,\text{coſ.}\,4\Phi - 6\,\text{coſ.}\,5\Phi \text{ etc.}$$

cuius ergo ſumma erit $= \frac{\text{coſ.}\,\Phi}{4\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\Phi^2}$, cuius veritas etiamnunc ſequenti modo oſtendi poteſt. Poſita ſeriei ſumma $= s$, erit

$$2s\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi = \left\{\begin{array}{l} 2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi - 2\,\text{coſ.}\tfrac{3}{2}\Phi + 3\,\text{coſ.}\tfrac{5}{2}\Phi - 4\,\text{coſ.}\tfrac{7}{2}\Phi \\ -2\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi + 3\,\text{coſ.}\tfrac{3}{2}\Phi - 4\,\text{coſ.}\tfrac{5}{2}\Phi + 5\,\text{coſ.}\tfrac{7}{2}\Phi \end{array}\right\} \text{etc.}$$

qui valor coaleſcit in ſequentem ſeriem:

$$2s\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi = \text{coſ.}\tfrac{3}{2}\Phi - \text{coſ.}\tfrac{5}{2}\Phi + \text{coſ.}\tfrac{7}{2}\Phi - \text{coſ.}\tfrac{9}{2}\Phi \text{ etc.}$$

Multiplicetur denuo per $2\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\Phi$, ac prodibit

$$4s\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi^2 = \left\{\begin{array}{l} \text{coſ.}\Phi + \text{coſ.}2\Phi - \text{coſ.}3\Phi + \text{coſ.}4\Phi + \text{coſ.}5\Phi \\ \qquad - \text{coſ.}2\Phi + \text{coſ.}3\Phi - \text{coſ.}4\Phi - \text{coſ.}5\Phi \end{array}\right\} \text{etc.} = \text{coſ.}\Phi$$

ideo-

ideoque $s = \frac{\text{coſ.}\,\Phi}{4\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\Phi^2}$, vti inuenimus, ſiue erit etiam

$$s = \frac{\text{coſ.}\,\Phi}{2(1 + \text{coſ.}\,\Phi)}.$$

§. 10. Sit nunc $n = -3$, orieturque haec ſeries infinita:

$$1 - 3\,\text{coſ.}\,\Phi + 6\,\text{coſ.}\,2\Phi - 10\,\text{coſ.}\,3\Phi + 15\,\text{coſ.}\,4\Phi - 21\,\text{coſ.}\,5\Phi \text{ etc.}$$

cuius ergo ſumma erit $= \frac{\text{coſ.}\,\frac{3}{2}\Phi}{8\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\Phi^3}$. Haec autem expreſſio porro reducitur ad hanc

$$s = \tfrac{1}{2} - \frac{3}{8\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\Phi^2} = \tfrac{1}{2} - \frac{3}{4(1 + \text{coſ.}\,\Phi)}$$

ita vt quoque ſit $s = \frac{-1 + 2\,\text{coſ.}\,\Phi}{4(1 + \text{coſ.}\,\Phi)}$.

§. 11. Simili modo ſequentes adipiſcemur ſummationes:

$$1 - 4\,\text{coſ.}\,\Phi + 10\,\text{coſ.}\,2\Phi - 20\,\text{coſ.}\,3\Phi \text{ etc.} = \frac{\text{coſ.}\,2\Phi}{16\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\Phi^4},$$

$$1 - 5\,\text{coſ.}\,\Phi + 15\,\text{coſ.}\,2\Phi - 35\,\text{coſ.}\,3\Phi + 70\,\text{coſ.}\,4\Phi \text{ etc.} = \frac{\text{coſ.}\,\frac{5}{2}\Phi}{32\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\Phi^5},$$

$$1 - 6\,\text{coſ.}\,\Phi + 21\,\text{coſ.}\,2\Phi - 56\,\text{coſ.}\,3\Phi + 126\,\text{coſ.}\,4\Phi \text{ etc.} = \frac{\text{coſ.}\,3\Phi}{64\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\Phi^6},$$

$$1 - 7\,\text{coſ.}\,\Phi + 28\,\text{coſ.}\,2\Phi - 84\,\text{coſ.}\,3\Phi + 210\,\text{coſ.}\,4\Phi \text{ etc.} = \frac{\text{coſ.}\,\frac{7}{2}\Phi}{128\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\Phi^7}.$$

Euolutio caſus

quo $n = \frac{1}{2}$.

§. 12. Hinc ergo formabitur ſequens ſeries infinita:

$$1 + \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,\Phi - \tfrac{1.1}{2.4}\,\text{coſ.}\,2\Phi + \tfrac{1.1.3}{2.4.6}\,\text{coſ.}\,3\Phi - \tfrac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\,\text{coſ.}\,4\Phi \text{ etc.}$$

 cuius

Digitized by Google

cuius ergo ſumma erit $= \operatorname{coſ}. \tfrac{1}{4}\Phi \sqrt{2 \operatorname{coſ}. \tfrac{1}{2}\Phi}$, cuius veritatem haud facile erit aliunde comprobare; certis autem caſibus manifeſto in oculos incurrit. Veluti ſi fuerit $\Phi = 0$, habebitur

$$1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1.1}{2.4} + \tfrac{1.1.3}{2.4.6} - \tfrac{1.1.3.5}{2.4.6.8} \text{ etc.} = \sqrt{2};$$

ſeries enim manifeſto oritur ex euolutione $(1 + 1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. Faciamus nunc $\Phi = 180^\circ$, vt ſit $\tfrac{1}{2}\Phi = 90^\circ$, et ſeries erit

$$1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1.1}{2.4} - \tfrac{1.1.3}{2.4.6} - \tfrac{1.1.3.5}{2.4.6.8} \text{ etc.} = 0$$

quod etiam inde euidens eſt, quia haec ſeries naſcitur ex forma $(1 - 1)^{\frac{1}{2}}$. Sit etiam $\Phi = 90^\circ$ et ſeries inde nata erit

$$1 + \tfrac{1.1}{2.4} - \tfrac{1.1.3.5}{2.4.6.8} + \tfrac{1.1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.12} \text{ etc.} = \operatorname{coſ}. 22^\circ, 30' \sqrt[4]{2}.$$

Eſt vero

$$\operatorname{coſ}. 22^\circ, 30^\circ = \sqrt{\tfrac{(1 + \operatorname{coſ}. 45^\circ)}{2}} = \sqrt{\tfrac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}$$

vnde ſumma concluditur $= \sqrt{\tfrac{(1 + \sqrt{2})}{2}}$, ſicque habetur haec ſummatio maxime memoratu digna:

$$1 + \tfrac{1.1}{2.4} - \tfrac{1.1.3.5}{2.4.6.8} + \tfrac{1.1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.12} \text{ etc.} = \sqrt{\tfrac{1 + \sqrt{2}}{2}}.$$

Sumamus etiam $\Phi = 60^\circ$, et orietur iſta ſeries:

$$1 + \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2} + \tfrac{1.1}{2.4}.\tfrac{1}{2} - \tfrac{1.1.3}{2.4.6}\,1 + \tfrac{1.1.3.5}{2.4.6.8}.\tfrac{1}{2} + \tfrac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10}.\tfrac{1}{2} + \tfrac{1.1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.12}.\,1 \text{ etc.}$$

cuius ſeriei ergo ſumma erit $\operatorname{coſ}. 15^\circ \sqrt[4]{3}$. Cum igitur ſit

$$\operatorname{coſ}. 15^\circ = \sqrt{\tfrac{1 + \operatorname{coſ}. 30^\circ}{2}} = \sqrt{\tfrac{2 + \sqrt{3}}{4}},$$

ſeriei ſumma erit $\tfrac{1}{2}\sqrt{(3 + 2\sqrt{3})}$.

Euolutio caſus
quo $n = -\tfrac{1}{2}$.

§. 13. Hinc ergo ſequens formabitur ſeries infinita:

$$1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{coſ}.\Phi + \tfrac{1.3}{2.4}\operatorname{coſ}. 2\Phi - \tfrac{1.3.5}{2.4.6}\operatorname{coſ}. 3\Phi + \tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\operatorname{coſ}. 4\Phi \text{ etc.}$$

cuius

cuius ergo ſumma erit $= \frac{\operatorname{coſ.} \frac{1}{4}\Phi}{\sqrt{2} \operatorname{coſ.} \frac{1}{2}\Phi}$. Hinc ſi fuerit $\Phi = 0$, oritur haec ſummatio:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} - \frac{1.3.5}{2.4.6} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \text{ etc.} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Naſcitur enim haec ſeries ex forma $(1+1)^{-\frac{1}{2}}$. Sit nunc $\Phi = 180°$, et ſeries reſultans erit

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} + \text{etc.} = \infty.$$

Oritur enim haec ſeries ex euolutione $(1-1)^{-\frac{1}{2}}$. Sumamus etiam $\Phi = 90°$ et ſeries erit

$$1 - \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} - \frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12} \text{ etc.} = \frac{\operatorname{coſ.} 22°, 30'}{\sqrt[4]{2}}.$$

Ante autem vidimus eſſe $\operatorname{coſ.} 22°, 30' = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}$, vnde iſta ſumma erit $= \frac{1}{2}\sqrt{(1+\sqrt{2})}$.

§. 14. In genere etiam pro exponentibus quibuscunque n operae pretium erit angulo Φ certos tribuere valores, ac primo quidem ſumpto $\Phi = 0$ habebimus

$$1 + \left(\frac{n}{1}\right) + \left(\frac{n}{2}\right) + \left(\frac{n}{3}\right) + \left(\frac{n}{4}\right) + \text{etc.} = 2^n;$$

haec ſcilicet ſeries eſt ipſa formula $(1+1)^n$ euoluta. Sumamus nunc $\Phi = 180°$ et orietur haec ſeries:

$$1 - \left(\frac{n}{1}\right) + \left(\frac{n}{2}\right) - \left(\frac{n}{3}\right) + \left(\frac{n}{4}\right) - \text{etc.} = 0,$$

ſcilicet haec ſeries eſt $= (1-1)^n$. Sit etiam $\Phi = 90°$ et ſeries hinc nata erit

$$1 - \left(\frac{n}{2}\right) + \left(\frac{n}{4}\right) - \left(\frac{n}{6}\right) + \left(\frac{n}{8}\right) - \left(\frac{n}{10}\right) \text{ etc.}$$

cuius ergo ſumma erit

$$2^n \operatorname{coſ.} 45^n \operatorname{coſ.} n\, 45° = 2^{\frac{1}{2}n} \operatorname{coſ.} n\, 45°.$$

§. 15.

§. 15. Haec poſtrema ſeries eo maiori attentione digna videtur, quod eius veritas non parum eſt abſcondita; vnde haud abs re erit caſus aliquot ſpeciales contemplari, ac primo quidem pro numeris integris poſitiuis:

1°. Si $n = 0$ erit $1 = 1$,
2°. Si $n = 1$ erit $1 = \operatorname{coſ}. 45° \sqrt{2} = 1$,
3°. Si $n = 2$ erit $1 - 1 = 2 \operatorname{coſ}. 90° = 0$,
4°. Si $n = 3$ erit $1 - 3 = 2^{\frac{3}{2}} \operatorname{coſ}. 3.45° = -2$,
5°. Si $n = 4$ erit $1 - 6 + 1 = 2^2 \operatorname{coſ}. 4.45° = -4$,
6°. Si $n = 5$ erit $1 - 10 + 5 = 2^{\frac{5}{2}} \operatorname{coſ}. 5.45° = -4$,
7°. Si $n = 6$ erit $1 - 15 + 15 - 1 = 2^3 \operatorname{coſ}. 6.45° = 0$,
8°. Si $n = 7$ erit $1 - 21 + 35 - 7 = 2^{\frac{7}{2}} \operatorname{coſ}. 7.45° = 2^3$,
9°. Si $n = 8$ erit $1 - 28 + 70 - 28 + 1 = 2^4 \operatorname{coſ}. 8.45° = 2^4$,
etc. etc.

§. 16. Maiorem attentionem merentur caſus, quibus pro n numeri negatiui accipiuntur, quippe quibus ſeries infinitae proueniunt.

1°. Si $n = -1$ erit $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ etc.
$= \frac{\operatorname{coſ}. 45°}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$,
2°. Si $n = -2$ erit $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + 13 - 15 + 17$ etc.
$= 2 \operatorname{coſ}. 2.45° = 0$,
3°. Si $n = -3$ erit $1 - 6 + 15 - 28 + 45 - 66 + 91$ etc.
$= \frac{\operatorname{coſ}. 3.45°}{\sqrt{8}} = -\frac{1}{4}$,
4°. Si $n = -4$ erit $1 - 10 + 35 - 84 + 165 - 286 + 455$ etc.
$= \frac{\operatorname{coſ}. 4.45°}{4} = -\frac{1}{4}$,

5°.

Digitized by Google

5°. Si $n = -5$ erit $1 - 15 + 70 - 210 + 495 - 1001$ etc.

$$= \frac{\cos. 5. 45^\circ}{2^{\frac{5}{2}}} = -\frac{1}{8}$$

6°. Si $n = -6$ erit $1 - 21 + 126 - 462 + 1287 - 3003$ etc.

$$= \frac{\cos. 6. 45^\circ}{8} = 0,$$

etc. etc.

In genere autem pro his caſibus erit

$$1 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{1.\ 2} + \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} - \frac{\lambda(\lambda+1) \ldots \ldots (\lambda+5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}$$
$$+ \frac{\lambda(\lambda+1) \ldots \ldots (\lambda+7)}{1.\ 2.\ \ldots \ldots 8} - \frac{\lambda(\lambda+1) \ldots \ldots (\lambda+9)}{1.\ 2.\ \ldots \ldots 10} \text{ etc.}$$

cuius ergo ſeriei ſumma erit

$$= \frac{\cos. \lambda. 45^\circ}{2^{\frac{1}{2}\lambda}}.$$

Problema 2.

Propoſita hac ſerie ſinuum:

$$\frac{n}{1} \sin. \Phi + \frac{n}{1} . \frac{n-1}{2} \sin. 2\Phi + \frac{n}{1} . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} \sin. 3\Phi + \text{etc.} = s,$$

ita vt per characteres ſupra adhibitos ſit

$$s = (\tfrac{n}{0}) \sin. 0\Phi + (\tfrac{n}{1}) \sin. \Phi + (\tfrac{n}{2}) \sin. 2\Phi + (\tfrac{n}{3}) \sin. 3\Phi + \text{etc.}$$

valorem huius ſummae s realiter exprimere.

Solutio.

§. 17. Quodſi hic iterum introducamus litteras

$$p = \cos. \Phi + \sqrt{-1} \sin. \Phi \text{ et}$$
$$q = \cos. \Phi - \sqrt{-1} \sin. \Phi,$$

quoniam eſt $p^n - q^n = 2\sqrt{-1} \sin. n\Phi$, ſeries propoſita in duas ſequentes diſcerpetur

$$2s\sqrt{-1} = \left\{ \begin{matrix} + \left(\frac{n}{1}\right) p + \left(\frac{n}{2}\right) pp + \left(\frac{n}{3}\right) p^3 + \left(\frac{n}{4}\right) p^4 \\ - \left(\frac{n}{1}\right) q - \left(\frac{n}{2}\right) qq - \left(\frac{n}{3}\right) q^3 - \left(\frac{n}{4}\right) q^4 \end{matrix} \right\} \text{ etc.}$$

vnde manifeſto erit

$$2s\sqrt{-1} = (1+p)^n - (1+q)^n.$$

§. 18. Hic iam iterum obſeruaſſe iuuabit eſſe

$$1 + p = (\sqrt{p} + \sqrt{q})\sqrt{p} \text{ et}$$
$$1 + q = (\sqrt{p} + \sqrt{q})\sqrt{q}$$

quibus valoribus adhibitis erit

$$2s\sqrt{-1} = (\sqrt{p} + \sqrt{q})^n (p^{\frac{1}{2}n} - q^{\frac{1}{2}n}).$$

Quoniam igitur eſt

$$p^{\frac{1}{2}n} - q^{\frac{1}{2}n} = 2\sqrt{-1} \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} n \Phi \text{ et}$$
$$\sqrt{p} + \sqrt{q} = 2 \text{ coſ. } \tfrac{1}{2}\Phi,$$

hinc per $2\sqrt{-1}$ diuidendo prodibit ſumma quaeſita realiter expreſſa $s = 2^n \text{ coſ. } \tfrac{1}{2}\Phi^n \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} n \Phi$.

DE

DE INTEGRATIONIBVS MAXIME MEMORABILIBVS EX CALCVLO IMAGINARIORVM ORIVNDIS.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 20 *Mart.* 1777.

§. 1.

Conſidero hic in genere formulam differentialem quamcunque $Z \partial z$, cuius integrale ſaltem per logarithmos et arcus circulares exhibere liceat, quod per characterem $\Delta : z$ deſigno, ita vt ſit $\int Z \partial z = \Delta : z$. Iam loco z ſcribo quantitatem quamcunque imaginariam, ſcilicet $z = x + y \sqrt{-1}$, vnde functio Z transmutetur in formam $M + N \sqrt{-1}$. Hoc modo forma differentialis euadet $(\partial x + \partial y \sqrt{-1})(M + N \sqrt{-1})$, cuius producti pars realis ergo erit $M \partial x - N \partial y$, imaginaria vero $(N \partial x + M \partial y) \sqrt{-1}$. Tum vero ipſum integrale, quod eſt $\Delta : (x + y \sqrt{-1})$, transmutari poterit in ſimilem formam $P + Q \sqrt{-1}$. Quare cum quantitates reales et imaginariae ſeorſim inter ſe conferri debeant, hinc duplex integratio orietur:

I. $P = \int (M \partial x - N \partial y)$,

II. $Q = \int (N \partial x + M \partial y)$,

quae ergo duae formulae ſemper erunt integrabiles, etiamſi binas variabiles x et y inuoluant. Erit ſcilicet per notum integrabilitatis criterium tam $\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)$, quam $\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)$. Vnde intelligitur, ex qualibet formula differentiali propoſita binas deduci poſſe integrationes eo magis notatu dignas et arduas, quo magis integrale fuerit complicatum, quam ob rem plures caſus euoluiſſe operae erit pretium.

I. Euolutio
formulae differentialis $z^n \partial z$.

§. 2. Cum igitur ſit $\int z^n \partial z = \frac{z^{n+1}}{n+1}$, ſi loco z ſcribamus $x + y\surd -1$, hae poteſtates binomii, in vſum vocando characteres, quibus iam ſaepius vncias deſignaui, euolutae dabunt

$$(x + y\surd -1)^n = x^n + \left(\tfrac{n}{1}\right) x^{n-1} y \surd -1 - \left(\tfrac{n}{2}\right) x^{n-2} yy - \left(\tfrac{n}{3}\right) x^{n-3} y^3 \surd -1 + \text{etc.}$$

Hinc colligitur fore

$$M = x^n - \left(\tfrac{n}{2}\right) x^{n-2} yy + \left(\tfrac{n}{4}\right) x^{n-4} y^4 - \left(\tfrac{n}{6}\right) x^{n-6} y^6 + \text{etc.} \quad \text{et}$$

$$N = \left(\tfrac{n}{1}\right) x^{n-1} y - \left(\tfrac{n}{3}\right) x^{n-3} y^3 + \left(\tfrac{n}{5}\right) x^{n-5} y^5 - \text{etc.}$$

Simili modo pro forma integralis erit

$$(n+1) P = x^{n+1} - \left(\tfrac{n+1}{2}\right) x^{n-1} yy + \left(\tfrac{n+1}{4}\right) x^{n-3} y^4 - \left(\tfrac{n+1}{6}\right) x^{n-5} y^6 + \text{etc.}$$

$$(n+1) Q = \left(\tfrac{n+1}{1}\right) x^n y - \left(\tfrac{n+1}{3}\right) x^{n-2} y^3 + \left(\tfrac{n+1}{5}\right) x^{n-4} y^5 - \text{etc.}$$

§. 3. His valoribus determinatis, binae integrationes, quas hinc adipiſcimur, ita ſe habebunt:

$$P = \int \left\{ \begin{array}{l} \partial x \left[x^n - \left(\tfrac{n}{2}\right) x^{n-2} y^2 + \left(\tfrac{n}{4}\right) x^{n-4} y^4 - \left(\tfrac{n}{6}\right) x^{n-6} y^6 + \text{etc.}\right] \\ -\partial y \left[\left(\tfrac{n}{1}\right) x^{n-1} y - \left(\tfrac{n}{3}\right) x^{n-3} y^3 + \left(\tfrac{n}{5}\right) x^{n-5} y^5 - \text{etc.}\right] \end{array} \right\}$$

quae

quae forma quemadmodum ipſi P aequetur per partes videamus. At eſt

$$\text{I. } \int x^n \partial x = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

quod cum primo termino ſeriei, §. 2. pro P inuentae, conuenit. Tum vero ſumatur

$$\text{II. } -\int (\tfrac{n}{2})\, x^{n-2} y^2 \partial x - \int (\tfrac{n}{1})\, x^{n-1} y \partial y,$$

hinc ex parte priore, ſumto y conſtante, oritur integrale

$$-\left(\frac{n}{2}\right) \frac{x^{n-1}}{n-1} yy,$$

ex parte vero poſteriore, ſumto x conſtante, orietur $-(\tfrac{n}{1})\, x^{n-1} \frac{yy}{2}$, quae duae expreſſiones manifeſto ſunt inter ſe aequales, ſcilicet $= -\tfrac{n}{2} x^{n-1} yy$. At vero ſecunda pars ipſius P eſt

$$-\frac{1}{n+1} (\tfrac{n+1}{2})\, x^{n-1} yy,$$

quae ob $(\frac{n+1}{2}) = \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n}{2}$ manifeſto fit $-\frac{n}{2} x^{n-1} yy$. Sumatur nunc

$$\text{III. } \int (\tfrac{n}{4})\, x^{n-4} y^4 \partial x + (\tfrac{n}{3})\, x^{n-3} y^3 \partial y.$$

Hic ex parte priore concluditur integrale $\frac{1}{n-3} (\tfrac{n}{4})\, x^{n-3} y^4$; ex parte autem poſteriore $\frac{1}{4} (\tfrac{n}{3})\, x^{n-3} y^4$. Quoniam igitur eſt $(\tfrac{n}{4}) = (\tfrac{n}{3}) \frac{n-3}{4}$, hae duae formulae manifeſto ſunt inter ſe aequales, et integrale erit

$$\tfrac{1}{4} (\tfrac{n}{3})\, x^{n-3} y^4 = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{1}{4} x^{n-3} y^4.$$

Pars tertia autem formulae pro P datae eſt $\frac{1}{n+1} \cdot (\frac{n+1}{4})\, x^{n-3} y^4$, qua ob $(\frac{n+1}{4}) = \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-2}{4}$ manifeſto illi eſt aequalis. Simili modo conuenientia ſequentium membrorum ipſius P oſtenditur, ſimulque facile intelligitur pari modo conſenſum formulae Q oſtendi poſſe.

§. 4. Quoties igitur exponens n eſt numerus integer poſitiuus, veritas noſtrarum formularum manifeſto in oculos incurrit. Verum ſi n fuerit vel numerus negatiuus vel fractus, tum

tum formulae pro litteris M et N, item P et Q, in infinitum excurrerent; vnde his caſibus calculum alio modo inſtrui oportet. Scilicet loco x et y binas alias variabiles in calculum introduci conueniet, ſtatuendo $\sqrt{(xx+yy)}=v$, et quaerendo angulum Φ, vt ſit tang. $\Phi = \frac{y}{x}$; tum autem erit $x = v$ coſ. Φ et $y = v$ ſin. Φ, ideoque differentiando

$$\partial x = \partial v \text{ coſ. } \Phi - v \partial \Phi \text{ ſin. } \Phi \text{ et}$$
$$\partial y = \partial v \text{ ſin. } \Phi + v \partial \Phi \text{ coſ. } \Phi.$$

His autem poſitis erit

$$(x + y\sqrt{-1})^n = v^n (\text{coſ. } n\Phi + \sqrt{-1} \text{ ſin. } n\Phi),$$

vnde colligitur

$$M = v^n \text{ coſ. } n\Phi \text{ et } N = v^n \text{ ſin. } n\Phi.$$

Deinde vero pro integrali erit

$$z^{n+1} = v^{n+1} [\text{coſ. } (n+1)\Phi + \sqrt{-1} \text{ ſin. } (n+1)\Phi]$$

vnde habebitur

$$P = \frac{v^{n+1} \text{ coſ. } (n+1)\Phi}{n+1} \text{ et } Q = \frac{v^{n+1} \text{ ſin. } (n+1)\Phi}{n+1}.$$

§. 5. Cum nunc inuenerimus

$$P = \int (M\partial x - N\partial y) \text{ et } Q = \int (N\partial x + M\partial y),$$

facta ſubſtitutione fiet

$$P = \int [v^n \partial v \text{ coſ. } (n+1)\Phi - v^{n+1} \partial \Phi \text{ ſin. } (n+1)\Phi] \text{ et}$$
$$Q = \int [v^n \partial v \text{ ſin. } (n+1)\Phi - v^{n+1} \partial \Phi \text{ coſ. } (n+1)\Phi].$$

Ambae autem hae formulae manifeſto integrationem admittunt, cum ex priore fiat

$$P = \frac{v^{n+1}}{n+1} \text{ coſ. } (n+1)\Phi \text{ et}$$
$$Q = \frac{v^{n+1}}{n+1} \text{ ſin. } (n+1)\Phi,$$

quae cum ſint obuia ad maiora progrediamur.

II.

Digitized by Google

II. Euolutio

formulae differentialis $\frac{\partial z}{1+zz}$, cujus integrale eſt *A* tang. *z*.

§. 6. Cum hic ſit $Z = \frac{1}{1+zz}$, poſito $z = x + y\sqrt{-1}$ erit $Z = \frac{1}{1+2xy\sqrt{-1}+xx-yy}$. Hic ante omnia denominatorem ab imaginariis liberari oportet, quod fit numeratorem et denominatorem multiplicando per $1 + xx - yy - 2xy\sqrt{-1}$ fietque

$$Z = \frac{1+xx-yy-2xy\sqrt{-1}}{(1+xx-yy)^2+4xxyy},$$

ſicque erit

$$M = \frac{1+xx-yy}{(1+xx-yy)^2+4xxyy} \quad \text{et} \quad N = \frac{-2xy}{(1+xx-yy)^2+4xxyy}.$$

Hinc igitur pro integrali $P + Q\sqrt{-1}$ impetrabimus

$$P = \int \frac{(1+xx-yy)\partial x + 2xy\partial y}{(1+xx-yy)^2+4xxyy} \quad \text{et}$$

$$Q = \int \frac{(1+xx-yy)\partial y - 2xy\partial x}{(1+xx-yy)^2+4xxyy};$$

hasque ambas formulas jam certo ſcimus eſſe integrabiles.

§. 7. Conſideremus accuratius denominatorem, qui evolvitur in hanc formam: $(xx+yy)^2 + 2(xx-yy) + 1$, quae porro reducitur ad $(xx+yy+1)^2 - 4yy$, quae ergo eſt productum ex his duobus factoribus:

$$(xx+yy+1-2y)(xx+yy+1+2y),$$

qui ergo factores ſunt $xx + (y+1)^2$ et $xx + (y-1)^2$. Hanc obrem ambae illae fractiones reſolvi poterunt in binas fractiones, quarum alterius denominator ſit $xx + (y+1)^2$ et alterius $xx + (y-1)^2$. Ad hanc reſolutionem faciendam vtamur reſolutione generali fractionis $\frac{S}{PQ}$ in has duas fractiones: $\frac{F}{P} + \frac{G}{Q}$; vbi numerator F reperitur ex formula $\frac{S}{Q}$, ponendo $P = 0$; alter vero G ex formula $\frac{S}{P}$, ponendo $Q = 0$.

§. 8. Pro formula priori erit

S =

Digitized by Google

$$S = (1 + xx - yy)\partial x + 2xy\partial y,$$
$$P = xx + (y+1)^2 \text{ et } Q = xx + (y-1)^2;$$

quamobrem pro priore fractione $\frac{F}{P}$ littera F definiri debet ex fractione $\frac{(1+xx-yy)\partial x+2xy\partial y}{xx+(y-1)^2}$, ponendo $xx+(y+1)^2=0$. Quare cum hinc ſit $xx = -(y+1)^2$, hoc valore tam in numeratore quam in denominatore ſubſtituto, vbi quidem xx occurrit, reperietur $\frac{+2\partial x(yy+y)+2xy\partial y}{4y} = \frac{1}{2}\partial x(y+1) - \frac{1}{2}x\partial y$. Simili modo pro fractione $\frac{G}{Q}$ numerator G definiri debet ex hac fractione: $\frac{(1+xx-yy)\partial x+2xy\partial y}{xx+(y+1)^2}$, ponendo $xx+(y-1)^2=0$, vnde fit $xx = -(y-1)^2$, quo valore ſubſtituto reperitur

$$G = \frac{2\partial x(y-yy)+2xy\partial y}{+4y} = -\frac{1}{2}\partial x(y-1) + \frac{1}{2}x\partial y.$$

Hinc igitur habebimus

$$P = \frac{1}{2}\int\frac{\partial x(y+1)-x\partial y}{xx+(y+1)^2} - \frac{1}{2}\int\frac{\partial x(y-1)-x\partial y}{xx+(y-1)^2}.$$

§. 9. Nunc autem integratio harum formularum nulla amplius laborat difficultate. Si enim pro priore ſtatuamus $y+1 = tx$, erit $\partial y = t\partial x + x\partial t$, vnde haec formula integralis transmutabitur in

$$-\frac{1}{2}\int\frac{\partial t}{1+tt} = -\frac{1}{2}\text{ A tang. } t = -\frac{1}{2}\text{ A tang. }\frac{y+1}{x}.$$

Pro altera formula ponatur $y-1 = ux$, ut ſit $\partial y = u\partial x + x\partial u$, eaque abibit in

$$\frac{1}{2}\int\frac{\partial u}{1+uu} = \frac{1}{2}\text{ A tang. } u = \frac{1}{2}\text{ A tang. }\frac{y-1}{x}$$

quocirca adepti ſumus valorem litterae P, qui eſt

$$P = \frac{1}{2}\text{ A tang. }\frac{y-1}{x} - \frac{1}{2}\text{ A tang. }\frac{y+1}{x}.$$

Cum nunc ſit

$$\text{A tang. } a - \text{A tang. } b = \text{A tang. }\frac{a-b}{1+ab}, \text{ erit}$$

$$P = -\frac{1}{2}\text{ A tang. }\frac{2x}{xx+yy-1}.$$

§. 10.

§. 10. Simili modo procedamus pro valore Q inveniendo, eritque

$$S = (1 + xx - yy)\partial y - 2xy\,\partial x \text{ atque}$$
$$T = xx + (y+1)^2 \text{ et } U = xx + (y-1)^2,$$

vnde pro fractione $\frac{S}{T}$ numerator F aequabitur fractioni

$$\frac{S}{U} = \frac{(1+xx-yy)\partial y - 2xy\,\partial x}{xx+(y-1)^2},$$

ſi quidem ſtatuatur

$$xx + (y+1)^2 = 0, \text{ ſiue } xx = -(y+1)^2.$$

Erit igitur

$$F = \frac{+2\partial y(yy+y) + 2xy\,\partial x}{4y} = \tfrac{1}{2}\partial y\,(y+1) + \tfrac{1}{2}x\,\partial x.$$

Tum vero erit numerator G ex fractione $\frac{(1+xx-yy)\partial y - 2xy\,\partial x}{xx+(y+1)^2}$, ſtatuendo $xx = -(y-1)^2$, hoc modo expreſſus:

$$G = \frac{-2\partial y(yy-y) - 2xy\,\partial x}{4y} = -\tfrac{1}{2}\partial y\,(y-1) - \tfrac{1}{2}x\,\partial x.$$

Hinc ergo fiet

$$Q = \tfrac{1}{2}\int\frac{\partial y(y+1) + x\,\partial x}{xx+(y+1)^2} - \tfrac{1}{2}\int\frac{\partial y(y-1) + x\,\partial x}{xx+(y-1)^2},$$

vbi in utraque formula valor eſt dimidium differentiale denominatoris, ſicque valor quaeſitus

$$Q = \tfrac{1}{4}l[xx+(y+1)^2] - \tfrac{1}{4}l[xx+(y-1)^2] = \tfrac{1}{4}l\frac{xx+(y+1)^2}{xx+(y-1)^2}.$$

§. 11. His igitur valoribus pro P et Q inventis valor integralis quaeſiti erit $P + Q\sqrt{-1}$, vnde cum formulae propoſitae integrale ſit A tang. z, nunc certi ſumus, ſi loco z ſcribamus $x + y\sqrt{-1}$, tum arcum circuli, cujus tangens eſt formula imaginaria $x + y\sqrt{-1}$, ſemper aequari huic formulae:

$$-\tfrac{1}{2}\text{ A tang. }\frac{2x}{xx+yy-1} + \frac{\sqrt{-1}}{4}\,l\frac{xx+(y+1)^2}{xx+(y-1)^2}.$$

§. 12. Neque vero opus fuerat hos valores pro P et Q per integrationem quaerere, ſed immediate ex integrali cognito A tang. $(x + y\sqrt{-1})$ deduci poſſunt. Si enim ponatur

$$P + Q\sqrt{-1} = A\,\text{tang.}\,(x + y\sqrt{-1}),$$

erit ſigno imaginarii mutato

$$P - Q\sqrt{-1} = A\,\text{tang.}\,(x - y\sqrt{-1}).$$

His jam formulis additis prodit

$$2P = A\,\text{tang.}\,(x + y\sqrt{-1}) + A\,\text{tang.}\,(x - y\sqrt{-1})$$
$$= A\,\text{tang.}\,\frac{2x}{1 - xx - yy}, \text{ ideoque}$$
$$P = \tfrac{1}{2}A\,\text{tang.}\,\frac{2x}{1 - xx - yy} = -\tfrac{1}{2}A\,\text{tang.}\,\frac{2x}{xx + yy - 1}.$$

Deinde ſubtractio illarum formularum praebet

$$2Q\sqrt{-1} = A\,\text{tang.}\,(x + y\sqrt{-1})$$
$$- A\,\text{tang.}\,(x - y\sqrt{-1}) = A\,\text{tang.}\,\frac{2y\sqrt{-1}}{1 + xx + yy}.$$

Quia vero eſt

$$A\,\text{tang.}\,u\sqrt{-1} = \int\frac{\partial u\sqrt{-1}}{1 - uu} = \sqrt{-1}\int\frac{\partial u}{1 - uu} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\,l\,\frac{1 + u}{1 - u},$$

hinc, cum noſtro caſu ſit $u = \frac{2y}{1 + xx - yy}$, erit

$$2Q\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\,l\,\frac{xx + (y + 1)^2}{xx + (y - 1)^2}, \text{ ergo}$$
$$Q = \tfrac{1}{4}\,l\,\frac{xx + (y + 1)^2}{xx + (y - 1)^2}$$

prorſus vti invenimus. Hoc autem imprimis pro aliis caſibus eſt notandum, vbi, quoties integrale $\int Z\,\partial z$ per logarithmos vel arcus circulares exprimere licet, quoniam, poſito $z = x + y\sqrt{-1}$, hos in partes duas reſolvere licet, alteram realem, alteram ſimpliciter imaginariam, inde valores quantitatum P et Q aſſignari poterunt, quantumvis ipſae formulae integrales pro his litteris reſultantes fuerint perplexae et abſtruſae.

III. Euolutio

formulae differentialis: $\frac{\partial z}{1 + z^3}$, cujus integrale conſtat eſſe

$$\tfrac{1}{3}\,l\,(1 + z) - \tfrac{1}{3}\,l\sqrt{(1 - z + zz)} + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\,A\,\text{tang.}\,\frac{z\sqrt{3}}{2 - z}.$$

§. 13. Ponamus igitur hic $z = x + y\sqrt{-1}$, eritque

Z =

$$Z = \frac{1}{1+z^3} = \frac{1}{1+x^3+3xxy\sqrt{-1}-3xyy-y^3\sqrt{-1}},$$

vbi cum denominator ſit

$$1+x^3-3xyy+\sqrt{-1}\,(3xxy-y^3),$$

multiplicetur ſupra et infra per

$$1+x^3-3xyy-\sqrt{-1}\,(3xxy-y^3),$$ fietque

$$Z = \frac{1+x^3-3xyy-\sqrt{-1}\,(3xxy-y^3)}{1+2x(xx-3yy)+(xx+yy)^3}.$$

Hinc ergo adipiſcimur

$$M = \frac{1+x^3-3xyy}{1+2x(xx-3yy)+(xx+yy)^3} \text{ et}$$

$$N = -\frac{(3xxy-y^3)}{1+2x(xx-3yy)+(xx+yy)^3}.$$

§. 14. Ex his jam valoribus, ſi integrale quaeſitum deſignemus per $P+Q\sqrt{-1}$, pro vtraque quantitate P et Q ſequentes obtinemus formulas integrales:

$$P = \int \frac{(1+x^3-3xyy)\partial x+(3xxy-y^3)\partial y}{1+2x(xx-3yy)+(xx+yy)^3} \text{ et}$$

$$Q = \int \frac{(1+x^3-3xyy)\partial y-(3xxy-y^3)\partial x}{1+2x(xx-3yy)+(xx+yy)^3}.$$

quas ambas formulas jam in anteceſſum novimus eſſe integrabiles, etiamſi evolutio harum formularum ſit difficillima, cum factores denominatoris non pateant; interim tamen valores harum litterarum P et Q ex ipſo integrali principali per z expreſſo derivare licebit.

§. 15. Quoniam in his formulis duae variabiles x et y inſunt, pro lubitu alterutram tanquam conſtantem tractare licebit. Ita ſi x pro conſtante ſumamus, ponendo $x=a$ pro literis P et Q has habebimus formulas integrales:

$$P = \int \frac{(3aay-y^3)\partial y}{1+2a(aa-3yy)+(aa+yy)^3} \text{ et}$$

$$Q = \int \frac{(1+a^3-3ayy)\partial y}{1+2a(aa-3yy)+(aa+yy)^3}.$$

Simili modo ſi y pro conſtante accipiatur, ponendo $y=b$ pro iisdem litteris ſequentes valores prodibunt:

$$P = \int \frac{(1 + x^3 - 3bbx)\partial x}{1 + 2x(xx - 3bb) + (bb + xx)^3} \text{ et}$$

$$Q = \int \frac{(b^3 - 3bxx)\partial x}{1 + 2x(xx - 3bb) + (bb + xx)^3}$$

qui valores, ſi calculus rite inſtituatur, congruere debent. Veruntamen ſemper tutius erit vti formulis principalibus, in quas ambae variabiles x et y ingrediuntur, propterea quod ſi his poſterioribus formulis vteremur, adiectio conſtantis in errorem praecipitare poſſet; ſi ſcilicet in prioribus littera a in poſterioribus vero littera b in conſtantem induceretur.

§. 16. Ob has ſummas difficultates ergo non parum mirandum eſt, valores horum integralium nihilo minus reuera exhiberi poſſe; tantum enim opus eſt, vt in integrali per z expreſſo loco z ſcribatur $x + y\sqrt{-1}$, atque ſingula membra in binas ſuas partes reſoluantur, alteram realem, alteram imaginariam; tum enim partes reales iunctim ſumtae dabunt valorem ipſius P, partes autem imaginariae valorem ipſius Q.

§. 17. Quoniam enim in memorato integrali tantum logarithmi cum arcu circulari occurrunt, ſufficiet duas ſequentes reductiones noſſe:

I. $l(p+q\sqrt{-1}) = l\sqrt{(pp+qq)} + \sqrt{-1}\,\text{A tang.}\frac{q}{p}$ et

II. $\text{A tang.}(p+q\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\text{A tang.}\frac{2p}{1-pp-qq} + \frac{\sqrt{-1}}{4}\, l\,\frac{pp+(q+1)^2}{pp+(q-1)^2}$.

Hinc cum prima pars ſit $\frac{1}{3}l(1+z)$, poſito $z = x + y\sqrt{-1}$, erit

$$l(1+x+y\sqrt{-1}) = l\sqrt{[(1+x)^2+yy]} + \sqrt{-1}\,\text{A tang.}\frac{y}{1+x}.$$

Pro ſecunda parte, quae erat $-\frac{1}{6}l(1 - z + zz)$, ob

$$1 - z + zz = 1 - x + xx - yy + \sqrt{-1}(2xy - y)$$

conſequenter,

$$p = 1 - x + xx - yy \text{ et } q = 2xy - y, \text{ erit}$$

$l(1-$

$$l(1-z+zz)=l\sqrt{[(xx+yy-x)^2+2xx-yy-2x+1]}$$
$$+\sqrt{-1}\,\text{A tang.}\frac{2xy-y}{1-x+xx-yy}.$$

Denique tertia pars erat $\frac{1}{\sqrt{3}}$ A tang. $\frac{z\sqrt{3}}{2-z}$, vbi ergo

$$\frac{z}{2-z}=\frac{x+y\sqrt{-1}}{2-x-y\sqrt{-1}}=\frac{2x+2y\sqrt{-1}-xx-yy}{(2-x)^2+yy},$$

vnde pro ſuperiori formula erit

$$p=\frac{(2x-xx-yy)\sqrt{3}}{(2-x)^2+yy} \text{ et } q=\frac{2y\sqrt{3}}{(2-x)^2+yy}.$$

Hinc ergo pro hac parte erit

$$\text{A tang}\frac{z\sqrt{3}}{2-z}=\tfrac{1}{2}\text{A tang.}\frac{2(2x-xx-yy)[(2-x)^2+yy]\sqrt{3}}{(2-x)^4+2yy(2-x)^2-3(2-x)^2xx+6xyy(2-x)-12yy}$$
$$+\frac{\sqrt{-1}}{4}l\frac{pp+(q+1)^2}{pp+(q-1)^2},$$

quae expreſſiones cum tantopere ſint prolixae, in vltima parte litteras p et q retinere maluimus; quam ob rem multo minus valores pro P et Q hic exhibemus, cum ſufficiat noſſe, partes reales iunctim ſumtas praebere P, imaginarias, per $\sqrt{-1}$ diviſas, Q; atque ob hanc cauſſam manifeſtum eſt, cur euolutio actualis ſuperiorum formularum non ſucceſſerit.

IV. Euolutio

formulae differentialis $\frac{z^{m-1}\partial z}{1+z^n}$

cuius integrale paſſim euolutum reperitur, ſi quidem exponentes m et n fuerint numeri integri.

§. 18. Ex hactenus traditis clare intelligitur, longe aliam viam hic eſſe ineundam. Statim igitur ſtatuamus $x=v\,\text{coſ.}\,\Phi$ et $y=v\,\text{ſin.}\,\Phi$, ita vt loco binarum variabilium x et y ſtatim binas alias v et Φ in calculum introducamus; tum enim erit

$$z^m=v^m(\text{coſ.}\,m\Phi+\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,m\Phi) \text{ et}$$
$$1+z^n=1+v^n(\text{coſ.}\,n\Phi+\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,n\Phi).$$

 Quare

Digitized by Google

Quare fractionem propoſitam ſupra et infra multiplicemus per $1 + v^n (\cos. n\Phi - \sqrt{-1} \sin. n\Phi)$, hincque prodibit denominator $1 + 2 v^n \cos. n\Phi + v^{2n}$.

§. 19. Pro numeratore, cum ſit

$$z^{m-1} \partial z = \tfrac{1}{m} \partial . z^m = \tfrac{1}{m} \partial . v^m (\cos. m\Phi + \sqrt{-1} \sin. m\Phi),$$

at vero in genere

$$\partial . (\cos. \omega + \sqrt{-1} \sin. \omega) = \partial \omega \sqrt{-1} (\cos. \omega + \sqrt{-1} \sin. \omega),$$

erit facta euolutione

$$z^{m-1} \partial z = v^{m-1} \partial v (\cos. m\Phi + \sqrt{-1} \sin. m\Phi)$$
$$+ v^m \partial \Phi \sqrt{-1} (\cos. m\Phi + \sqrt{-1} \sin. m\Phi), \text{ ſiue}$$
$$z^{m-1} \partial z = v^{m-1} (\cos. m\Phi + \sqrt{-1} \sin. m\Phi)(\partial v + v \partial \Phi \sqrt{-1}).$$

Hanc ergo formulam inſuper multiplicari oportet per

$$1 + v^n (\cos. n\Phi - \sqrt{-1} \sin. n\Phi),$$

pro qua operatione notetur eſſe

$$(\cos. \alpha + \sqrt{-1} \sin. \alpha)(\cos. \beta - \sqrt{-1} \sin. \beta)$$
$$= \cos. (\alpha - \beta) + \sqrt{-1} \sin. (\alpha - \beta),$$

hinc ergo noſter numerator erit

$$v^{m-1} (\cos. m\Phi + \sqrt{-1} \sin. m\Phi)(\partial v + v \partial \Phi \sqrt{-1})$$
$$+ v^{m+n-1} [\cos. (m-n)\Phi + \sqrt{-1} \sin. (m-n)\Phi](\partial v + v \partial \Phi \sqrt{-1})$$

cuius ergo pars realis erit

$$v^{m-1} \partial v \cos. m\Phi + v^{m+n-1} \partial v \cos. (m-n)\Phi - v^m \partial \Phi \sin. m\Phi$$
$$- v^{m+n} \partial \Phi \sin. (m-n)\Phi,$$

pars vero imaginaria erit

$$v^{m-1} \partial v \sqrt{-1} \sin. m\Phi + v^m \partial \Phi \sqrt{-1} \cos. m\Phi$$
$$+ v^{m+n-1} \partial v \sqrt{-1} \sin. (m-n)\Phi$$
$$+ v^{m+n} \partial \Phi \sqrt{-1} \cos. (m-n)\Phi.$$

§. 20.

§. 20. His praeparatis, ſi formulae noſtrae differentialis integrale quaeſitum ſtatuamus $= P + Q\sqrt{-1}$, vtramque partem per ſequentes formulas integrales reales inueniemus expreſſam:

$$P = \int \frac{v^{m-1}\partial v\,[\text{coſ.}\,m\Phi + v^n \text{coſ.}\,(m-n)\Phi] - v^m \partial\Phi\,[\text{ſin.}\,m\Phi + v^n \text{ſin.}\,(m-n)\Phi]}{1 + 2v^n \text{coſ.}\,n\Phi + v^{2n}},$$

$$Q = \int \frac{v^{m-1}\partial v\,[\text{ſin.}\,m\Phi + v^n \text{ſin.}\,(m-n)\Phi] + v^m \partial\Phi\,[\text{coſ.}\,m\Phi + v^n \text{coſ}\,(m-n)\Phi]}{1 + 2v^n \text{coſ.}\,n\Phi + v^{2n}}.$$

Haec igitur integralia ex ipſo integrali principali per z expreſſo deriuare licebit, vti ante iam obſeruauimus, ſiquidem totum integrale partim ex logarithmis, partim ex arcubus circularibus, quorum tangentes dantur, componitur. Interim tamen videamus, num methodo conſueta haec integralia inueſtigare liceat.

Inueſtigatio formulae integralis:

$$P = \int \frac{v^{m-1}\partial v\,[\text{coſ.}\,m\Phi + v^n \text{coſ.}\,(m-n)\Phi] - v^m \partial\Phi\,[\text{ſin.}\,m\Phi + v^n \text{ſin.}\,(m-n)\Phi]}{1 + 2v^n \text{coſ.}\,n\Phi + v^{2n}}.$$

§. 21. Totum ergo negotium huc redit, vt ante omnia denominator in ſuos factores reſoluatur, eosque trinomiales, quandoquidem ad noſtrum inſtitutum omnes factores debent eſſe reales. Ponamus ergo factorem huius denominatoris eſſe $1 - 2v\,\text{coſ.}\,\omega + vv$, atque neceſſe eſt, vt poſito hoc factore $= 0$ (vnde fit $v = \text{coſ.}\,\omega + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\omega$) etiam ipſe denominator euaneſcat. Quoniam igitur hinc fiet

$$v^n = \text{coſ.}\,n\omega + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,n\omega \text{ et}$$

$$v^{2n} = \text{coſ.}\,2n\omega + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,2n\omega,$$

his ſubſtitutis denominator induet hanc formam:

$$1 + 2\,\text{coſ.}\,n\Phi\,\text{coſ.}\,n\omega + \text{coſ.}\,2n\omega + \sqrt{-1}\,(2\,\text{coſ.}\,n\Phi\,\text{ſin.}\,n\omega + \text{ſin.}\,2n\omega)$$

cuius ergo tam pars realis quam imaginaria ſeorſim nihilo aequari

quari debet. Ex imaginaria igitur haec oritur aequatio:

$$2\,\text{coſ.}\,n\,\Phi\,\text{ſin.}\,n\,\omega + \text{ſin.}\,2\,n\,\omega = 0,$$

vnde per ſin. $n\,\omega$ diuidendo prodit

$$2\,\text{coſ.}\,n\,\Phi + \text{coſ.}\,n\,\omega = 0.$$

At vero ex parte reali deducitur

$$1 + 2\,\text{coſ.}\,n\,\Phi\,\text{coſ.}\,n\,\omega + \text{coſ.}\,2\,n\,\omega = 0$$

vnde quia

$$1 + \text{coſ.}\,2\,n\,\omega = 2\,\text{coſ.}\,n\,\omega^2, \text{ erit}$$

$$\text{coſ.}\,n\,\Phi + \text{coſ.}\,n\,\omega = 0$$

prorſus vt ante. Vnde patet, angulum ω ita accipi debere, vt fiat coſ. $n\,\omega = -$ coſ. $n\,\Phi$, cui conditioni infinitis modis ſatisfieri poteſt, ſumendo vel $n\,\omega = \pi \pm n\,\Phi$ vel $n\,\omega = 3\,\pi \pm n\,\Phi$, vel $n\omega = 5\,\pi \pm n\Phi$, atque adeo in genere $n\omega = (2\,i + 1)\,\pi \pm n\Phi$. Atque hinc adeo n valores diuerſi pro ω obtinebuntur; totidem vero nobis eſt opus ad denominatorem implendum. Forma igitur generalis anguli ω erit $\omega = \frac{(2\,i + 1)\,\pi}{n} \pm \Phi$; et quicunque huiusmodi valor ipſi ω tribuatur, denominatoris factor erit $1 - 2\,v$ coſ. $\omega + v\,v$, quo euaneſcente ſimul ipſe denominator euaneſcet, fietque ſcilicet $v^{2\,n} = -2\,v^n$ coſ. $n\,\Phi - 1$.

§. 22. Inuentis iam omnibus factoribus denominatoris, ipſa formula propoſita in totidem partes reſolui poterit, quarum denominatores ſint iſti ipſi factores trinomiales $1 - 2\,v\,\text{coſ.}\,\omega + v\,v$; quam ob rem pro quolibet tali factore fractionem ei reſpondentem, hoc eſt eius numeratorem, inueſtigari oportebit, qui cum ex numeratore ipſius formae propoſitae deduci debeat, ponamus breuitatis gratia numeratorem formulae integralis propoſitae $R\,\partial\,v + S\,\partial\,\Phi$, ita vt ſit

$$R = v^{m-1}\,[\text{coſ.}\,m\,\Phi + v^n\,\text{coſ.}\,(m-n)\,\Phi] \text{ et}$$

$$S = v^m\,[\text{ſin.}\,m\,\Phi + v^n\,\text{ſin.}\,(m-n)\,\Phi].$$

Iam

Digitized by Google

Iam primo euoluamus fractionem $\frac{R}{1+2v^n \text{coſ.}\, n\Phi + v^{2n}}$, quam inuoluere fingamus hanc fractionem ſimplicem: $\frac{r}{1-2v\,\text{coſ.}\,\omega+vv}$, pro cuius numeratore r conſtat, eius valorem deriuari debere ex fractione $\frac{R(1-2v\,\text{coſ.}\,\omega+vv)}{1+2v^n\,\text{coſ.}\,n\Phi+v^{2n}}$, poſito $1-2v\,\text{coſ.}\,\omega+vv=0$, vbi operationem ita inſtitui oportet, vt pro r quantitas integra obtineatur.

§. 23. Quoniam autem caſu $1-2v\,\text{coſ.}\,\omega+vv=0$ tam numerator quam denominator euaneſcit, notum eſt hoc caſu iſtam fractionem $\frac{1-2v\,\text{coſ.}\,\omega+vv}{1+2v^n\,\text{coſ.}\,n\Phi+v^{2n}}$ aequari huic:

$$\frac{v-\text{coſ.}\,\omega}{nv^{2n-1}+nv^{n-1}\,\text{coſ.}\,n\Phi}=\frac{vv-v\,\text{coſ.}\,\omega}{nv^n(v^n+\text{coſ.}\,n\Phi)},$$

cuius denominator, ob $v^{2n}=-2v^n\,\text{coſ.}\,n\Phi-1$, dabit $-nv^n\,\text{coſ.}\,n\Phi-n$; numerator vero, ob $vv=2v\,\text{coſ.}\,\omega-1$, erit $v\,\text{coſ.}\,\omega-1$, ideoque fractio $=\frac{-v\,\text{coſ.}\,\omega+1}{n(v^n\,\text{coſ.}\,n\Phi-1)}$. Ex denominatore autem nihilo aequato fit $v^n=\text{coſ.}\,n\Phi+\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,n\Phi$, qui valor in hoc denominatore ſubſtitutus dat

$$\frac{1-v\,\text{coſ.}\,\omega}{n\,\text{coſ.}\,n\Phi^2+n\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,n\Phi\,\text{coſ.}\,n\Phi-n}=\frac{v\,\text{coſ.}\,\omega-1}{n\,\text{ſin.}\,n\Phi(\text{ſin.}\,n\Phi-\sqrt{-1}\,\text{coſ.}\,n\Phi)}.$$

Numerator vero, poſito $v=\text{coſ.}\,\omega+\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\omega$, abibit in $-\text{ſin.}\,\omega(\text{ſin.}\,\omega-\sqrt{-1}\,\text{coſ.}\,\omega)$, ſicque tota haec fractio erit $-\frac{\text{ſin.}\,\omega(\text{ſin.}\,\omega-\sqrt{-1}\,\text{coſ.}\,\omega)}{n\,\text{ſin.}\,n\Phi(\text{ſin.}\,n\Phi-\sqrt{-1}\,\text{coſ.}\,n\Phi)}$. Nunc haec fractio ſupra et infra ducatur in $\text{ſin.}\,n\Phi+\sqrt{-1}\,\text{coſ.}\,n\Phi$, prodibitque

$$-\frac{\text{ſin.}\,\omega\,[\text{coſ.}\,(\omega-n\Phi)+\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,(\omega-n\Phi)]}{n\,\text{ſin.}\,n\Phi}.$$

Verum imaginaria, quae hic adhuc ſuperſunt, noſtrum negotium

prorſus turbant. Interim tamen hoc incommodum tolli poterit, ſi quantitas v in numeratorem introducatur. Ponamus igitur numeratorem eſſe $Av+B$, ita vt A et B ſint quantitates reales; vnde cum ſit

$$A v + B = A \operatorname{coſ.} \omega + B + \sqrt{-1}\, A \operatorname{ſin.} \omega,$$

partes reales et imaginariae ſeorſim aequentur, ſicque eſſe debet

$$A \operatorname{ſin.} \omega = -\operatorname{ſin.} (\omega - n\Phi) \operatorname{ſin.} \omega,$$

vnde fit $A = -\operatorname{ſin.} (\omega - n\Phi)$, quo valore ſubſtituto partes reales dabunt

$$-\operatorname{coſ.} \omega \operatorname{ſin.} (\omega - n\Phi) + B = -\operatorname{ſin.} \omega \operatorname{coſ.} (\omega - n\Phi),$$

vnde fit $B = -\operatorname{ſin.} n\Phi$, ſicque fractio noſtra erit

$$\frac{-v \operatorname{ſin.} (\omega - n\Phi) - \operatorname{ſin.} n\Phi}{n \operatorname{ſin.} n\Phi}.$$

§. 24. Nunc igitur tantum ſupereſt vt iſta formula multiplicetur per R, eius ſcilicet valorem, quem accipiet poſito

$$v v - 2 v \operatorname{coſ.} \omega + 1 = 0.$$

Erat autem

$$R = v^{m-1} [\operatorname{coſ.} m\Phi + v^n \operatorname{coſ.} (m-n)\Phi],$$

quod poſito $v = \operatorname{coſ.} \omega + \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} \omega$ abit in

$$\operatorname{coſ.} m\Phi \operatorname{coſ.} (m-1)\omega + \operatorname{coſ.} (m-n)\Phi \operatorname{coſ.} (m+n-1)\omega$$
$$+ \sqrt{-1}\, [\operatorname{coſ.} m\Phi \operatorname{ſin.} (m-1)\omega + \operatorname{coſ.} (m-n)\Phi \operatorname{ſin.} (m+n-1)\omega],$$

cuius loco, vt imaginaria extirpemus, ſcribamus

$$C v + D, \text{ ſiue } C \operatorname{coſ.} \omega + D + \sqrt{-1}\, C \operatorname{ſin.} \omega,$$

vnde erit

$$C = \frac{\operatorname{coſ.} m\Phi \operatorname{ſin.} (m-1)\omega + \operatorname{coſ.} (m-n)\Phi \operatorname{ſin.} (m+n-1)\omega}{\operatorname{ſin.} \omega}$$

et hinc

$$D = \frac{\operatorname{coſ.} m\Phi \operatorname{ſin.} (2-m)\omega + \operatorname{coſ.} (m-n)\Phi \operatorname{ſin.} (2-m-n)\omega}{\operatorname{ſin.} \omega}.$$

§. 25.

Digitized by Google

§. 25. Inuentis nunc valoribus litterarum A, B, C, D, erit numerator noſter quaeſitus $r = (A v + B)(C v + D)$. Quia autem hic adhuc ineſt quadratum $v v$, eius loco ſcribendum reſtat $2 v \text{coſ.} \omega - 1$, ſicque erit valor iuſtus

$$r = 2 A C v \text{coſ.} \omega - A C + (A D + B C) v + B D.$$

Conſequenter pars integralis huic factori reſpondens pro variabili v erit $\int \frac{r \partial v}{1 - 2 v \text{coſ.} \omega + v v}$. Simili modo pro altera variabili Φ fractio partialis ex fractione $\frac{S}{1 - 2 v^n \text{coſ.} n \Phi + v^{2n}}$ deriuari debet, quae ſi ſtatuatur $\frac{s}{1 - 2 v \text{coſ.} \omega + v v}$, atque quantitas S redigatur ad formam $E v + F$, ſimili modo reperietur $s = (A v + B)(E v + F)$, vbi autem inſuper loco $v v$ ſcribi debet $2 v \text{coſ.} \omega - 1$, quo facto pro variabili Φ habebitur formula $\int \frac{s \partial \Phi}{1 - 2 v \text{coſ.} \omega + v v}$.

§. 26. Quod ſi iam haec colligamus, pars integralis ex quolibet denominatoris factore $1 - 2 v \text{coſ.} \omega + v v$ oriunda erit $\int \frac{r \partial v + s \partial \Phi}{1 - 2 v \text{coſ.} \omega + v v}$; vbi imprimis notandum eſt, hic criterium notiſſimum circa integrabilitatem formularum duas variabiles inuoluentium certe locum eſſe habiturum. Sufficiet autem plerumque alterutram tantum variabilem conſideraſſe.

§. 27. Hic quidem ad valorem litterae P inueniendum ſufficere poſſet formula $\int \frac{r \partial v}{1 - 2 v \text{coſ.} \omega + v v}$, in qua ſola v vt variabilis tractetur, cuius integrale, vti conſtat, per logarithmos et arcus circulares exhiberi poteſt. Interim tamen hoc idem integrale etiam erui debet ex altera formula $\int \frac{s \partial \Phi}{1 - 2 v \text{coſ.} \omega + v v}$, in qua ſolus angulus Φ cum angulo ω ab eo pendente variabilis aſſumitur, quae integratio eo magis eſt notatu digna, quod plura multipla anguli Φ in ea occurrunt, neque adhuc methodus tales formulas tractandi ſatis eſt exculta. At vero haec nimis

 ſunt

Digitized by Google

ſunt generalia, quam vt ea, quae in iis ſunt contenta, clare perſpicere queamus; vnde haud parum lucis nobis accendetur, ſi quosdam caſus ſimpliciſſimos contemplabimur.

Applicatio ad formulam differentialem $\frac{\partial z}{1+z}$, vbi eſt $m = 1$ et $n = 1$.

§. 28. Cum huius formulae integrale ſit $l(1+z)$, poſito $z = x + y\sqrt{-1}$, ſeu potius, vti in genere fecimus,

$$z = v(\text{coſ.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi),$$

integrale

$$l(1 + v\,\text{coſ.}\,\Phi + v\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi)$$

euoluitur in formam $P + Q\sqrt{-1}$, exiſtente

$$P = l\sqrt{(1 + 2v\,\text{coſ.}\,\Phi + vv)} \text{ et}$$

$$Q = \text{A tang.}\,\frac{v\,\text{ſin.}\,\Phi}{1 + v\,\text{coſ.}\,\Phi}.$$

§. 29. Nunc igitur eosdem valores per integrationem eruere conemur. Poſitis autem $m = n = 1$, formulae generales pro P et Q exhibitae ſequentes induent formas:

$$P = \int \frac{\partial v(\text{coſ.}\,\Phi + v) - v\,\partial\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi}{1 + 2v\,\text{coſ.}\,\Phi + vv} \text{ et}$$

$$Q = \int \frac{\partial v\,\text{ſin.}\,\Phi + v\,\partial\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi + vv\,\partial\Phi}{1 + 2v\,\text{coſ.}\,\Phi + vv},$$

vbi formula prior manifeſto habet integrale

$$\tfrac{1}{2}l(1 + 2v\,\text{coſ.}\,\Phi + vv),$$

poſterior vero integrale habet A tang. $\frac{v\,\text{ſin.}\,\Phi}{1 + v\,\text{coſ.}\,\Phi}$, quemadmodum differentiatio manifeſto declarat, ita vt hic non opus fuerit alterum angulum ω in calculum introducere.

Appli-

Applicatio

ad formulam differentialem $\frac{\partial z}{1+zz}$, vbi $m=1$ et $n=2$.

§. 30. Hunc caſum iam ſupra euoluimus, vbi vidimus, poſito $z=x+y\sqrt{-1}$, integrale eſſe

$$\text{A tang.}\, x+y\sqrt{-1}=-\tfrac{1}{2}\text{A tang.}\frac{2x}{xx+yy-1}+\frac{\sqrt{-1}}{4}\,l\,\frac{xx+(y+1)^2}{xx+(y-1)^2}.$$

Hinc ergo ſi ponamus $x=v\,\text{coſ.}\,\Phi$ et $y=v\,\text{ſin.}\,\Phi$, erit pro integrali $P+Q\sqrt{-1}$

$$P=-\tfrac{1}{2}\text{A tang.}\frac{2v\,\text{coſ.}\,\Phi}{vv-1}=\tfrac{1}{2}\text{A tang.}\frac{2v\,\text{coſ.}\,\Phi}{1-vv}\ \text{et}$$

$$Q=\tfrac{1}{4}\,l\,\frac{1+2v\,\text{ſin.}\,\Phi+vv}{1-2v\,\text{ſin.}\,\Phi+vv}.$$

Hos igitur valores videamus quemadmodum per integrationem eliciamus.

§. 31. Cum igitur hic ſit $m=1$ et $n=2$, formulae generales praebebunt

$$P=\int\frac{\partial v(1+vv)\,\text{coſ.}\,\Phi-v\,\partial\Phi(1-vv)\,\text{ſin.}\,\Phi}{1+2vv\,\text{coſ.}\,2\Phi+v^4},$$

$$Q=\int\frac{\partial v(1-vv)\,\text{ſin.}\,\Phi+v\,\partial\Phi(1+vv)\,\text{coſ.}\,\Phi}{1+2vv\,\text{coſ.}\,2\Phi+v^4},$$

vbi notetur denominatoris binos factores, ob

$$\text{coſ.}\,2\omega=-\text{coſ.}\,2\Phi=\text{coſ.}\,(\pi\pm2\Phi),$$

hincque vel $\omega=90^\circ+\Phi$, vel $\omega=90^\circ-\Phi$, eſſe

$$1+2v\,\text{ſin.}\,\Phi+vv\ \text{et}\ 1-2v\,\text{ſin.}\,\Phi+vv.$$

Hinc ad reſolutionem expediendam conſideremus in genere fractionem $\frac{S}{1+2vv\,\text{coſ.}\,2\Phi+v^4}$, quam reſolui ponamus in has partes:

$$\frac{F}{1+2v\,\text{ſin.}\,\Phi+vv}+\frac{G}{1-2v\,\text{ſin.}\,\Phi+vv},$$

vbi nouimus hos numeratores ita definiri debere, vt ſit

$$F = \frac{S}{1 - 2v\,\text{ſin.}\,\Phi + vv}, \text{ poſito } 1 + 2v\,\text{ſin.}\,\Phi + vv = 0, \text{ et}$$
$$G = \frac{S}{1 + 2v\,\text{ſin.}\,\Phi + vv}, \text{ poſito } 1 - 2v\,\text{ſin.}\,\Phi + vv = 0.$$

§. 32. Quoniam nunc tam pro P quam Q binas habemus partes, alteram per ∂v, alteram vero per $\partial \Phi$ datam, ſit primo $S = (1 + vv)\,\text{coſ.}\,\Phi$, vnde fit

$$F = \frac{(1 + vv)\,\text{coſ.}\,\Phi}{1 - 2v\,\text{ſin.}\,\Phi + vv}, \text{ poſito } 1 + vv = -2v\,\text{ſin.}\,\Phi,$$

vnde ſtatim fit

$$F = \frac{-2v\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{-4v\,\text{ſin.}\,\Phi} = \tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,\Phi;$$

ſimilique modo erit

$$G = \frac{(1 + vv)\,\text{coſ.}\,\Phi}{1 + 2v\,\text{ſin.}\,\Phi + vv}, \text{ poſito } 1 + vv = +2v\,\text{ſin.}\,\Phi,$$

ſicque erit $G = +\tfrac{1}{2}\,\text{coſ.}\,\Phi$: quamobrem pro P pars integralis elementum ∂v continens erit

$$P = \tfrac{1}{2}\int \frac{\partial v\,\text{coſ.}\,\Phi}{1 + 2v\,\text{ſin.}\,\Phi + vv} + \tfrac{1}{2}\int \frac{\partial v\,\text{coſ.}\,\Phi}{1 - 2v\,\text{ſin.}\,\Phi + vv}.$$

§. 33. Pro parte autem vbi Φ eſt variabile, habebimus $S = -v(1 - vv)\,\text{ſin.}\,\Phi$, vnde fiet

$$F = \frac{-v(1 - vv)\,\text{ſin.}\,\Phi}{1 - 2v\,\text{ſin.}\,\Phi + vv}, \text{ poſito } 1 + vv = -2v\,\text{ſin.}\,\Phi,$$

ideoque $vv = -2v\,\text{ſin.}\,\Phi - 1$, vnde fit $F = \tfrac{1}{2}(1 + v\,\text{ſin.}\,\Phi)$. Simili modo erit $G = \frac{-v(1 - vv)\,\text{ſin.}\,\Phi}{1 + 2v\,\text{ſin.}\,\Phi + vv}$, poſito ſcilicet $1 + vv = 2v\,\text{ſin.}\,\Phi$, quo facto fit $G = -\tfrac{1}{2}(1 - v\,\text{ſin.}\,\Phi)$. Hinc igitur valor completus quantitatis P ex vtraque variabilitate erit

$$P = \tfrac{1}{2}\int \frac{\partial v\,\text{coſ.}\,\Phi + (1 + v\,\text{ſin.}\,\Phi)\,\partial\Phi}{1 + 2v\,\text{ſin.}\,\Phi + vv} + \tfrac{1}{2}\int \frac{\partial v\,\text{coſ.}\,\Phi - (1 - v\,\text{ſin.}\,\Phi)\,\partial\Phi}{1 - 2v\,\text{ſin.}\,\Phi + vv}.$$

§. 34. Pari modo pro quantitate Q primo habemus $S = (1 - vv)\,\text{ſin.}\,\Phi$, ideoque fiet

$$F = \frac{(1 - vv)\,\text{ſin.}\,\Phi}{1 - 2v\,\text{ſin.}\,\Phi + vv}, \text{ poſito } 1 + vv = -2v\,\text{ſin.}\,\Phi,$$

vnde

Digitized by Google

vnde ſit $F = \frac{1 + v\,\mathit{ſin.}\,\Phi}{2v}$. Hic autem v ex denominatore extrudere oportet, quem in finem multiplicetur ſupra et infra per $v + 2$ ſin. Φ, vt denominator fiat $2(vv + 2v\,\text{ſin.}\,\Phi) = -2$; numerator autem tunc erit

$$vv\,\text{ſin.}\,\Phi + v + 2v\,\text{ſin.}\,\Phi^2 + 2\,\text{ſin.}\,\Phi,$$

ideoque $F = -\frac{1}{2}(v + \text{ſin.}\,\Phi)$. Simili modo erit

$$G = \frac{(1 - vv)\,\mathit{ſin.}\,\Phi}{1 + 2v\,\mathit{ſin.}\,\Phi + vv},$$ poſito ſcilicet $1 + vv = 2v$ ſin. Φ,

quo facto fit $G = \frac{1 - vv}{4v}$, et ob $1 = 2v\,\text{ſin.}\,\Phi - vv$, erit $G = \frac{1}{2}(\text{ſin.}\,\Phi - v)$. Sicque pars prior pro Q variabilem v continens erit

$$Q = \frac{1}{2}\int\frac{\partial v(v + \mathit{ſin.}\,\Phi)}{1 + 2v\,\mathit{ſin.}\,\Phi + vv} + \frac{1}{2}\int\frac{\partial v(\mathit{ſin.}\,\Phi - v)}{1 - 2v\,\mathit{ſin.}\,\Phi + vv}.$$

Pro altera vero parte variabilem Φ habente erit $S = v(1 + vv)\text{coſ.}\,\Phi$, hincque colligitur

$$F = \frac{v(1 + vv)\,\mathit{coſ.}\,\Phi}{1 - 2v\,\mathit{ſin.}\,\Phi + vv},$$ poſito $1 + 2v$ ſin. $\Phi + vv = 0$,

ſiue $1 + vv = -2v$ ſin. Φ, vnde fit $F = \frac{1}{2}v$ coſ. Φ; tum vero erit

$$G = \frac{v(1 + vv)\,\mathit{coſ.}\,\Phi}{1 + 2v\,\mathit{ſin.}\,\Phi + vv},$$ poſito $1 + vv = +2v$ ſin. Φ,

ideoque $G = \frac{1}{2}v$ coſ. Φ, ſicque valor completus ipſius Q erit

$$Q = \frac{1}{2}\int\frac{\partial v(v + \mathit{ſin.}\,\Phi) + v\,\partial\Phi\,\mathit{coſ.}\,\Phi}{1 + 2v\,\mathit{ſin.}\,\Phi + vv} + \frac{1}{2}\int\frac{\partial v(\mathit{ſin.}\,\Phi - v) + v\,\partial\Phi\,\mathit{coſ.}\,\Phi}{1 - 2v\,\mathit{ſin.}\,\Phi + vv}.$$

§. 35. Incipiamus ab euolutione poſterioris valoris Q, vtpote facillima, quoniam in vtraque formula numerator manifeſto eſt dimidium differentiale denominatoris, vnde ſtatim obtinetur $Q = \frac{1}{4}\,l\,\frac{1 + 2v\,\mathit{ſin.}\,\Phi + vv}{1 - 2v\,\mathit{ſin.}\,\Phi + vv}$, qui valor prorſus congruit cum ſupra dato. Pro littera P autem notetur eſſe

$$\int\frac{f\,\partial v}{1 - 2v\,\mathit{coſ.}\,\omega + vv} = \frac{f}{\mathit{ſin.}\,\omega}\,\text{A tang.}\,\frac{v\,\mathit{ſin.}\,\omega}{1 + v\,\mathit{coſ.}\,\omega},$$

vnde cum noſtro caſu pro parte priore ſit $f = \text{coſ.}\,\Phi$, coſ. $\omega = -\text{ſin.}\,\Phi$ et ſin. $\omega = \text{coſ.}\,\Phi$, erit

$$\int \frac{\partial v \operatorname{coſ}. \Phi}{1 + 2 v \operatorname{ſin}. \Phi + v v} = \text{A tang.} \frac{v \operatorname{coſ}. \Phi}{1 + v \operatorname{ſin}. \Phi},$$

ſi quidem angulus Φ vt conſtans tractetur. At vero ex eius variabilitate non prodit altera pars, quae eſt $\int \frac{\partial \Phi (1 + v \operatorname{ſin}. \Phi)}{1 + 2 v \operatorname{ſin}. \Phi + v v}$, ſed eius loco differentiatio praebet $\frac{- v \partial \Phi \operatorname{ſin}. \Phi - v v \partial \Phi}{1 + 2 v \operatorname{ſin}. \Phi + v v}$. In hunc ergo diſſenſum accuratius inquiri conueniet.

§. 36. Primo quidem nullum eſt dubium quin differentiatio formulae A tang. $\frac{v \operatorname{coſ}. \Phi}{1 + v \operatorname{ſin}. \Phi}$ praebeat partem priorem; ſed idem contingeret, ſi conſtans quaecunque adiiceretur, quare cum in hac integratione angulus Φ pro conſtante ſit habitus, iſta conſtans vtique adhuc ipſum angulum Φ continere poteſt. Hancobrem in genere ſtatuamus integrale quaeſitum eſſe

$$\text{A tang.} \frac{v \operatorname{coſ}. \Phi}{1 + v \operatorname{ſin}. \Phi} + \int \Phi \partial \Phi,$$

exiſtente Φ functione ipſius Φ, et iam huius formulae differentiale, poſito v conſtante, erit

$$\frac{- v \partial \Phi \operatorname{ſin}. \Phi - v v \partial \Phi}{1 + 2 v \operatorname{ſin}. \Phi + v v} + \Phi \partial \Phi = \partial \Phi \left\{ \begin{matrix} \Phi + 2 v \Phi \operatorname{ſin}. \Phi + \Phi v v \\ - v \operatorname{ſin}. \Phi - v v \end{matrix} \right\};$$

vbi ſi ſumatur $\Phi = 1$, ipſum noſtrum differentiale prodit

$$\frac{\partial \Phi (1 + v \operatorname{ſin}. \Phi)}{1 + 2 v \operatorname{ſin}. \Phi + v v},$$

ita vt iſta pars ſit

$$\text{A tang.} \frac{v \operatorname{coſ}. \Phi}{1 + v \operatorname{ſin}. \Phi} + \Phi = \text{A tang.} \frac{v \operatorname{coſ}. \Phi}{1 + v \operatorname{ſin}. \Phi} + \text{A tang.} \frac{\operatorname{ſin}. \Phi}{\operatorname{coſ}. \Phi},$$

qui duo arcus contracti praebent A tang. $\frac{\operatorname{ſin}. \Phi + v}{\operatorname{coſ}. \Phi}$, haecque formula differentiata ipſum producit integrale datum.

§. 37. Pro altera autem parte ipſius P, quae eſt

$$\int \frac{\partial v \operatorname{coſ}. \Phi - (1 - v \operatorname{ſin}. \Phi) \partial \Phi}{1 - 2 v \operatorname{ſin}. \Phi + v v},$$

cum haec forma a priori tantum in hoc diſcrepet, quod angulus Φ ſit negatiue ſumtus, idem diſcrimen in integrali introductum dabit A tang. $\frac{v - \operatorname{ſin}. \Phi}{\operatorname{coſ}. \Phi}$. Sicque completus valor quantitatis P erit

P =

Digitized by Google

$$P = \tfrac{1}{2}\,\text{A tang.}\,\frac{v + ſin.\,\Phi}{coſ.\,\Phi} + \tfrac{1}{2}\,\text{A tang.}\,\frac{v - ſin.\,\Phi}{coſ.\,\Phi}$$

qui duo arcus in vnum contracti dabunt

$$P = \tfrac{1}{2}\,\text{A tang.}\,\frac{2\,v\,coſ.\,\Phi}{1 - v\,v},$$

qui valor pariter perfecte congruit cum ſupra dato.

Applicatio
ad caſum quo $m = 1$ et $n = 3$, ſeu formulam differentialem $\frac{\partial z}{1 + z^3}$.

§. 38. Quod ſi hic ponatur $z = coſ.\,\Phi + \sqrt{-1}\,ſin.\,\Phi$ et integrale inde reſultans ſtatuatur $\int \frac{\partial z}{1 + z^3} = P + Q\sqrt{-1}$, ex formulis generalibus ſupra datis erit

$$P = \int \frac{\partial v\,(coſ.\,\Phi + v^3\,coſ.\,2\,\Phi) - v\,\partial\Phi\,(ſin.\,\Phi - v^3\,ſin.\,2\,\Phi)}{1 + 2\,v^3\,coſ.\,3\,\Phi + v^6} \quad \text{et}$$

$$Q = \int \frac{\partial v\,(ſin.\,\Phi - v^3\,ſin.\,2\,\Phi) + v\,\partial\Phi\,(coſ.\,\Phi + v^3\,coſ.\,2\,\Phi)}{1 + 2\,v^3\,coſ.\,3\,\Phi + v^6}.$$

§. 39. Hic igitur denominator tres habebit factores trinomiales, quorum forma ſi ponatur $1 - 2\,v\,coſ.\,\omega + v\,v$, debet eſſe $coſ.\,3\,\omega = -coſ.\,3\,\Phi$. Aequabitur ergo $3\,\omega$ vel $\pi + 3\,\Phi$, vel $\pi - 3\,\Phi$, vel $3\,\pi - 3\,\Phi$, vnde ergo oriuntur hi tres valores ipſius ω:

$$\omega = 60^\circ + \Phi,\quad \omega = 60^\circ - \Phi,\quad \omega = 180^\circ - \Phi.$$

Nunc igitur in genere conſideremus hanc fractionem: $\frac{S}{1 + 2\,v^3\,coſ.\,3\,\Phi + v^6}$, cuius vna fractio partialis ſit $\frac{F}{1 - 2\,v\,coſ.\,\omega + v\,v}$; atque, vt ſupra animaduertimus, valorem ipſius F deriuari oportet ex forma $\frac{S\,(1 - 2\,v\,coſ.\,\omega + v\,v)}{1 + 2\,v^3\,coſ.\,3\,\Phi + v^6}$, ſi ſtatuatur $1 - 2\,v\,coſ.\,\omega + v\,v = 0$; tum autem iſta fractio reducetur ad hanc formam: $\frac{S\,(v\,v - v\,coſ.\,\omega)}{3\,v^6 + 3\,v^3\,coſ.\,3\,\Phi}$. Cum autem ſit

$$v^6 = -2\,v^3\,coſ.\,3\,\Phi - 1,$$

denominator erit

$$-3\,(v^3\,coſ.\,3\,\Phi + 1),$$

numerator vero $S(v\,\text{coſ.}\,\Phi - 1)$, ſicque fractio reſoluenda erit $\frac{S(1 - v\,\text{coſ.}\,\omega)}{3(v\,\text{coſ.}\,3\Phi + 1)} = F$, poſtquam ſcilicet ex denominatore quantitas v fuerit eliſa.

§. 40. Quoniam igitur per hypotheſin habemus

$$v = \text{coſ.}\,\omega + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\omega, \text{ erit}$$

$$v^3 = \text{coſ.}\,3\,\omega + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,3\,\omega;$$

vbi notetur eſſe $\text{coſ.}\,3\,\omega = -\,\text{coſ.}\,3\,\Phi$; tum vero erit $\text{ſin.}\,3\,\omega = \pm\,\text{ſin.}\,3\,\Phi$. Scilicet pro primo valore, quo $\omega = 60^\circ + \Phi$, ſiue $3\,\omega = 180^\circ + 3\,\Phi$, erit $\text{ſin.}\,3\,\omega = -\,\text{ſin.}\,3\,\Phi$; pro ſecundo valore, quo $3\,\omega = 180^\circ - 3\,\Phi$, erit $\text{ſin.}\,3\,\omega = +\,\text{ſin.}\,3\,\Phi$; pro tertio caſu, quo $3\,\omega = 3\,\pi - 3\,\Phi$, erit etiam $\text{ſin.}\,3\,\omega = +\,\text{ſin.}\,3\,\Phi$. Hoc autem valore poſito denominator noſter erit

$$3\,(-\,\text{coſ.}\,3\,\Phi^2 \pm \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,3\,\Phi\,\text{coſ.}\,3\,\Phi + 1),$$

vbi ſignum ſuperius valet pro valore tertio et ſecundo anguli ω, inferius autem pro primo. Hic denominator etiam hoc modo concinnius exprimi poteſt:

$$3\,\text{ſin.}\,3\,\Phi\,(\text{ſin.}\,3\,\Phi \pm \sqrt{-1}\,\text{coſ.}\,3\,\Phi).$$

§. 41. Nunc igitur tam numeratorem quam denominatorem ducamus in $\text{ſin.}\,3\,\Phi \mp \sqrt{-1}\,\text{coſ.}\,3\,\Phi$, eritque

$$F = \frac{S(1 - v\,\text{coſ.}\,\omega)(\text{ſin.}\,3\,\Phi \mp \sqrt{-1}\,\text{coſ.}\,3\,\Phi)}{3\,\text{ſin.}\,3\,\Phi}.$$

At ſi etiam loco v ſcribamus $\text{coſ.}\,\omega + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\omega$, fiet

$$F = \frac{S\,\text{ſin.}\,\omega\,(\text{ſin.}\,\omega - \sqrt{-1}\,\text{coſ.}\,\omega)(\text{ſin.}\,3\,\Phi \mp \sqrt{-1}\,\text{coſ.}\,3\,\Phi)}{3\,\text{ſin.}\,3\,\Phi}.$$

Hinc ſi bini factores imaginarii numeratoris in ſe invicem ducantur, reperietur

$$F = \frac{S\,\text{ſin.}\,\omega\,[\mp\,\text{coſ.}\,(\omega \pm 3\,\Phi) \mp \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,(\omega \pm 3\,\Phi)]}{3\,\text{ſin.}\,3\,\Phi}$$

vbi imaginaria non amplius curamus, quoniam, vti ſupra vidimus, introducendo litteram v, ea rurſus tollere licet.

Digitized by Google

§. 41. Nunc autem pro S quatuor habemus valores ad binas litteras P et Q definienda. Primo enim pro P et elemento ∂v erit $S = \text{coſ.}\,\Phi + v^3\,\text{coſ.}\,2\,\Phi$, vbi loco v^3 ſcribamus valorem jam ante uſurpatum $-\,\text{coſ.}\,3\,\Phi \pm \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,3\,\Phi$; vnde fiet

$$S = \text{coſ.}\,\Phi - \text{coſ.}\,3\,\Phi\,\text{coſ.}\,2\,\Phi \pm \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,3\,\Phi\,\text{coſ.}\,2\,\Phi$$
$$= \text{ſin.}\,3\,\Phi\,(\text{ſin.}\,2\,\Phi \pm \sqrt{-1}\,\text{coſ.}\,2\,\Phi),$$

ſicque erit valor noſter

$$F = \tfrac{1}{3}\,\text{ſin.}\,\omega\,(\text{ſin.}\,2\,\Phi \pm \sqrt{-1}\,\text{coſ.}\,2\,\Phi)\,[\mp\,\text{coſ.}\,(\omega \pm 3\,\Phi) \mp \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,(\omega \pm 3\,\Phi)],$$

qui valor pro ſignis ſuperioribus erit

$$F = -\tfrac{1}{3}\,\text{ſin.}\,\omega\,[\text{ſin.}\,(\omega + \Phi) + \sqrt{-1}\,\text{coſ.}\,(\omega + \Phi)],$$

at pro ſignis inferioribus prodit

$$F = +\tfrac{1}{3}\,\text{ſin.}\,\omega\,[\text{ſin.}\,(\omega - \Phi) - \sqrt{-1}\,\text{coſ.}\,(\Phi - \Phi)].$$

§. 42. Nunc autem neceſſe eſt imaginaria hinc ſecludi, ad quod efficiendum ſtatuamus

$$\text{ſin.}\,(\omega + \Phi) + \sqrt{-1}\,\text{coſ.}\,(\omega + \Phi) = A\,v + B$$
$$= A\,\text{coſ.}\,\omega + B + \sqrt{-1}\,A\,\text{ſin.}\,\omega,$$

vnde manifeſto deducitur

$$A = \frac{\text{coſ.}\,(\omega + \Phi)}{\text{ſin.}\,\omega} \text{ et } B = -\frac{\text{coſ.}\,(2\,\omega + \Phi)}{\text{ſin}\,\omega},$$

ſicque habebimus pro priore caſu

$$F = -\tfrac{1}{3}\,v\,\text{coſ.}\,(\omega + \Phi) + \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,(2\,\omega + \Phi),$$

pro poſteriore vero

$$A = -\frac{\text{coſ.}\,(\omega - \Phi)}{\text{ſin.}\,\omega} \text{ et } B = \frac{\text{coſ.}\,\Phi}{\text{ſin.}\,\omega}, \text{ ideoque}$$
$$F = -\tfrac{1}{3}\,v\,\text{coſ.}\,(\omega - \Phi) + \tfrac{1}{3}\,\text{coſ.}\,\Phi.$$

Verum non opus eſt vlterius progredi, quoniam evolutio horum caſuum ſpecialium nobis jam viam ſternit ad formam genera-

Digitized by Google

neralem euoluendam, quam ergo in ſequente problemate proſequemur.

Problema generale.

Si ponatur $z = v(\text{coſ.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi)$, *inueſtigare integrale bujus formulae:* $\int \frac{z^{m-1}\,\partial z}{1+z^n}$.

Solutio.

§. 43. Cum ob valorem ipſius z imaginarium integrale quaeſitum pariter eſſe debeat imaginarium, id ſub forma $P + Q\sqrt{-1}$ complectamur, ita vt P et Q ſint quantitates reales, hanc ob rem erit facta ſubſtitutione indicata

$$\int \frac{z^{m-1}\,\partial z}{1+z^n} = P + Q\sqrt{-1}.$$

§. 44. Cum porro ſit $z = v(\text{coſ.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi)$, erit
$z^n = v^n(\text{coſ.}\,n\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,n\Phi)$ et
$\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial v}{v} + \partial\Phi\sqrt{-1}$.

Hinc igitur formula propoſita abibit in hanc:

$$\frac{v^m(\text{coſ.}\,m\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,m\Phi)(\frac{\partial v}{v} + \partial\Phi\sqrt{1})}{1 + v^n(\text{coſ.}\,n\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,n\Phi)},$$

vbi pro ſequente ratiocinio notetur, denominatorem evaneſcere, ſi ponatur

$$v^n = -\frac{1}{\text{coſ.}\,n\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,n\Phi} = -\text{coſ.}\,n\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,n\Phi.$$

Nunc vero ut denominator ab imaginariis liberetur, ſupra et infra multiplicetur per $1 + v^n(\text{coſ.}\,n\Phi - \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,n\Phi)$ et formula differentialis, quam per ∂V deſignemus, erit

$$\partial V = \frac{v^m(\text{coſ.}\,m\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,m\Phi)(\frac{\partial v}{v} + \partial\Phi\sqrt{-1})[(1 + v^n(\text{coſ.}\,n\Phi - \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,n\Phi)]}{1 + 2v^n\,\text{coſ.}\,n\Phi + v^{2n}}.$$

Nu-

Numerator autem reduci poteſt ad hanc formam:

$$v^m(\frac{\partial v}{v}+\partial\Phi\sqrt{-1})[\text{coſ}.m\Phi+\sqrt{-1}\,\text{ſin}.m\Phi+v^n(\text{coſ}.(m-n)\Phi+\sqrt{-1}\,\text{ſin}.(m-n)\Phi)]$$

cujus partes reales et imaginariae ita a ſe invicem ſegregabuntur, ut ſit pars realis

$$v^{m-1}\partial v[\text{coſ}.m\Phi+v^n\text{coſ}.(m-n)\Phi-v^m\partial\Phi(\text{ſin}.m\Phi+v^n\text{ſin}.(m-n)\Phi)]$$

pars vero imaginaria per $\sqrt{-1}$ diviſa

$$v^{m-1}\partial v[\text{ſin}.m\Phi+v^n\text{ſin}.(m-n)\Phi+v^m\partial\Phi(\text{coſ}.m\Phi+v^n\text{coſ}.(m-n)\Phi)]$$

§. 45. Ponamus nunc brevitatis gratia

$$R = \text{coſ}.\, m\,\Phi + v^n\, \text{coſ}.\, (m-n)\,\Phi \text{ et}$$
$$S = \text{ſin}.\, m\,\Phi + v^n\, \text{ſin}.\, (m-n)\,\Phi$$

et ambae quantitates quaeſitae P et Q per ſequentes formulas integrales exprimentur:

$$P = \int \frac{R\, v^{m-1}\, \partial v - S\, v^m\, \partial\Phi}{1 + 2\, v^n\, \text{coſ}.\, n\,\Phi + v^{2n}} \text{ et}$$

$$Q = \int \frac{S\, v^{m-1}\, \partial v + R\, v^m\, \partial\Phi}{1 + 2\, v^n\, \text{coſ}.\, n\,\Phi + v^{2n}}.$$

Totum negotium ergo huc redit, ut primo denominatoris factores trinomiales inveſtigentur, tum vero ex ſingulis fractiones partiales eruantur.

§. 46. Ponamus igitur denominatoris factorem quemcunque eſſe $1 - 2\,v\,\text{coſ}.\,\omega + v\,v$, atque neceſſe erit ut poſito $1 - 2\,v\,\text{coſ}.\,\omega + v\,v = 0$ etiam denominator evaneſcat, id quod ante jam animadvertimus fieri caſu

$$v^n = -\,\text{coſ}.\, n\,\Phi + \sqrt{-1}\, \text{ſin}.\, n\,\Phi.$$

At vero cum ſit $v = \text{coſ}.\,\omega + \sqrt{-1}\,\text{ſin}.\,\omega$, erit hinc

$$v^n = \text{coſ}.\, n\,\omega + \sqrt{-1}\, \text{ſin}.\, n\,\omega,$$

unde manifeſtum eſt eſſe debere $\text{coſ}.\, n\,\omega = -\,\text{coſ}.\, n\,\Phi$ et

Digitized by Google

ſin. $n\,\omega = +$ ſin. $n\,\Phi$. Hinc patet angulorum $n\,\omega$ et $n\,\Phi$ ſummam aequari debere angulo $i\,\pi$, denotante i numerum imparem quemcunque, ita vt $n\,\omega = i\,\pi - n\,\Phi$, ideoque $\omega = \frac{i\,\pi}{n} - \Phi$. Evidens autem eſt hoc modo pro ω tot diverſos valores reperiri, quot exponens n habet vnitates. Singuli enim iſti valores prodibunt, ſi loco i ſumantur numeri impares 1, 3, 5, 7 etc. vſque ad $2\,n - 1$; quamobrem ſinguli iſti factores totidem producunt fractiones partiales, idque pro ſingulis partibus, quibus litterae P et Q exprimuntur.

§. 47. Ad hanc reſolutionem inſtituendam conſideremus in genere fractionem $\frac{N}{1 + 2\,v^n\,\text{coſ.}\,n\,\Phi + v^{2n}}$, vnde pro factore $1 - 2\,v\,\text{coſ.}\,\omega + v\,v$ oriatur fractio partialis $= \frac{F}{1 - 2\,v\,\text{coſ.}\,\omega + v\,v}$, reliquae vero partes omnes deſignentur per Ω, ita vt ſit

$$\frac{N}{1 + 2\,v^n\,\text{coſ.}\,n\,\Phi + v^{2n}} = \frac{F}{1 - 2\,v\,\text{coſ.}\,\omega + v\,v} + \Omega,$$

vnde colligimus

$$F = \frac{N\,(1 - 2\,v\,\text{coſ.}\,\omega + v\,v)}{1 + 2\,v^n\,\text{coſ.}\,n\,\Phi + v^{2n}} - \Omega\,(1 - 2\,v\,\text{coſ.}\,\omega + v\,v).$$

Ex quo intelligitur, valorem ipſius F ex ſola parte priore elici poſſe, ſi ſtatuatur $1 - 2\,v\,\text{coſ.}\,\omega + v\,v = 0$. At vero tum prioris partis tam numerator quam denominator evaneſcet, vnde ſecundum regulam notiſſimam differentialia ſubſtitui debent, quo facto fiet

$$F = \frac{N\,(2\,v - 2\,\text{coſ.}\,\omega)}{2\,n\,v^{2n-1} + 2\,n\,v^{n-1}\,\text{coſ.}\,n\,\Phi} = \frac{N\,(v - \text{coſ.}\,\omega)}{n\,v^{n-1}\,(v^n + \text{coſ.}\,n\,\Phi)};$$

§. 48.

§. 48. Cum autem caſu, quo iſta euaneſcentia numeratoris et denominatoris euenit, ſit

$$v = \text{coſ.}\,\omega + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\omega \quad \text{et}$$
$$v^n = -\text{coſ.}\,n\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,n\Phi,$$

his valoribus ſubſtitutis fiet

$$F = \frac{N\,\text{ſin.}\,\omega}{n\,v^{n-1}\,\text{ſin.}\,n\Phi} = \frac{N\,v\,\text{ſin.}\,\omega}{n\,v^n\,\text{ſin.}\,n\Phi}.$$

Nunc igitur tantum opus eſt, vt loco N diverſae partes, quae ſupra in numeratoribus formularum P et Q occurrerunt, ſubſtituantur, hincque ope aequationis $v\,v - 2\,v\,\text{coſ.}\,\omega + 1 = 0$ ſingulae expreſſiones infra ſecundam poteſtatem ipſius v deprimantur.

§. 49. Hunc in finem in uſum vocetur ſequens lemma: *Si fuerit* $v\,v - 2\,v\,\text{coſ.}\,\omega + 1 = 0$, *ſemper erit*

$$v^\lambda\,\text{ſin.}\,\omega = v\,\text{ſin.}\,\lambda\,\omega - \text{ſin.}\,(\lambda - 1)\,\omega,$$

cujus veritas haud difficulter demonſtratur. Tantum autem opus eſt vt pro littera N gemini valores evolvantur, qui ſunt $N = R\,v^{m-1}$ et $N = S\,v^{m-1}$, quibus deinceps adjungi debebit ſiue ∂v, ſiue $v\,\partial\Phi$. Sit igitur primo

$$N = R\,v^{m-1} = v^{m-1}\,\text{coſ.}\,m\Phi + v^{m+n-1}\,\text{coſ.}\,(m-n)\Phi$$

eritque

$$F = \frac{v^{m-n}\,\text{ſin}\,\omega\,\text{coſ.}\,m\Phi + v^m\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,(m-n)\Phi}{n\,\text{ſin.}\,n\Phi}$$

vbi ſecundum lemma habebimus

$$v^{m-n}\,\text{ſin.}\,\omega = v\,\text{ſin.}\,(m-n)\,\omega - \text{ſin.}\,(m-n-1)\,\omega \quad \text{et}$$
$$v^m\,\text{ſin.}\,\omega = v\,\text{ſin.}\,m\,\omega - \text{ſin.}\,(m-1)\,\omega$$

vnde ergo conficitur

$$F = \frac{1}{n\,\text{ſin.}\,n\Phi}\left[\begin{array}{l} +\,v\,\text{ſin.}\,(m-n)\,\omega\,\text{coſ.}\,m\Phi - \text{ſin.}\,(m-n-1)\,\omega\,\text{coſ.}\,m\Phi \\ +\,v\,\text{ſin.}\,m\,\omega\,\text{coſ.}\,(m-n)\Phi - \text{ſin.}\,(m-1)\,\omega\,\text{coſ.}\,(m-n)\Phi \end{array}\right].$$

§. 50.

Digitized by Google

§. 50. In hac expreſſione littera v ducitur in formulam

$$\text{ſin.}\,(m-n)\,\omega\,\text{coſ.}\,m\,\Phi+\text{coſ.}\,(m-n)\,\Phi\,\text{ſin.}\,m\,\omega,$$

pro cujus reſolutione notetur eſſe

$$\text{coſ.}\,n\,\omega=-\text{coſ.}\,n\,\Phi \text{ et } \text{ſin.}\,n\,\omega=+\text{ſin.}\,n\,\Phi,$$

hincque fiet

$$\text{ſin.}\,(m-n)\,\omega=-\text{ſin.}\,m\,\omega\,\text{coſ.}\,n\,\Phi-\text{coſ.}\,m\,\omega\,\text{ſin.}\,n\,\Phi,$$

tum vero

$$\text{coſ.}\,(m-n)\,\Phi=\text{coſ.}\,m\,\Phi\,\text{coſ.}\,n\,\Phi+\text{ſin.}\,m\,\Phi\,\text{ſin.}\,n\,\Phi,$$

quibus valoribus ſubſtitutis quantitas litteram v afficiens erit $-\text{ſin.}\,n\,\Phi\,\text{coſ.}\,m\,(\omega+\Phi)$. Hinc autem pars reliqua oritur, ſi mutato ſigno loco $m\,\omega$ ſcribatur $(m-1)\,\omega$, ſicque integer valor quaeſitus erit

$$F=-\tfrac{1}{n}\,[v\,\text{coſ.}\,m\,(\omega+\Phi)-\text{coſ.}\,(m-1)\,\omega+m\,\Phi].$$

§. 51. Supra autem vidimus eſſe $\omega+\Phi=\frac{i\pi}{n}$, ideoque $m\,(\omega+\Phi)=\frac{mi\pi}{n}$, cujus loco ſcribamus ζ, quo facto pro caſu praeſente, quo $N=R\,v^{m-1}$, fractionis quaeſitae numerator erit

$$F=-\tfrac{1}{n}\,[v\,\text{coſ.}\,\zeta-\text{coſ.}\,(\zeta-\omega)],$$

quem igitur duplici modo adhiberi convenit; namque pro littera P is multiplicari debet per ∂v, pro littera Q vero per $v\,\partial\Phi$.

§. 52. Simili modo pro caſu

$$N=S\,v^{m-1}=v^{m-1}\,\text{ſin.}\,m\,\Phi+v^{m+n-1}\,\text{ſin.}\,(m-n)\,\Phi,$$

oritur

$$F=\frac{v^{m-n}\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{ſin.}\,m\,\Phi+v^{m}\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{ſin.}\,[m-n)\,\Phi}{n\,\text{ſin.}\,n\,\Phi}.$$

Jam loco poteſtatum ipſius v ſcribamus valores ſupra aſſignatos, ac prodibit

F =

Digitized by Google

$$F = \frac{1}{n\,\text{ſin.}\,n\,\Phi}\left[\begin{array}{l} v\,\text{ſin.}\,m\,\Phi\,\text{ſin.}\,(m-n)\,\omega - \text{ſin.}\,m\,\Phi\,\text{ſin.}\,(m-n-1)\,\omega \\ v\,\text{ſin.}\,(m-n)\,\Phi\,\text{ſin.}\,m\,\omega - \text{ſin.}\,(m-n)\,\Phi\,\text{ſin.}\,(m-1)\,\omega \end{array}\right].$$

Cum jam ſit

$$\text{ſin.}\,(m-n)\,\omega = -\,\text{ſin.}\,m\,\omega\,\text{coſ.}\,n\,\omega - \text{coſ.}\,m\,\omega\,\text{ſin.}\,n\,\omega \text{ et}$$

$$\text{ſin.}\,(m-n)\,\Phi = \text{ſin.}\,m\,\Phi\,\text{coſ.}\,n\,\Phi - \text{coſ.}\,m\,\Phi\,\text{ſin.}\,n\,\Phi$$

littera v affecta eſt hac quantitate:

$$-\,\text{ſin.}\,n\,\Phi\,\text{ſin.}\,(\Phi+\omega)\,m = -\,\text{ſin.}\,n\,\Phi\,\text{ſin.}\,\zeta$$

vnde integer valor erit

$$F = -\tfrac{1}{n}\,[v\,\text{ſin.}\,\zeta - \text{ſin.}\,(\zeta-\omega)]$$

qui valor pro P duci debet in $-v\,\partial\Phi$, pro Q autem in $+\partial v$.

§. 53. His igitur valoribus inventis ſinguli anguli ω, quorum numerus eſt $= n$, dabunt totidem partes pro quantitatibus quaeſitis P et Q, ſcilicet valor $\omega = \frac{i\pi}{n} - \Phi$, exiſtente $\frac{m i \pi}{n} = \zeta$, dabit

$$P = -\tfrac{1}{n}\int\frac{\partial v\,[v\,\text{coſ.}\,\zeta - \text{coſ.}\,(\zeta-\omega)] - v\,\partial\Phi\,[v\,\text{ſin.}\,\zeta - \text{ſin.}\,(\zeta-\omega)]}{1 - 2v\,\text{coſ.}\,\omega + vv} \text{ et}$$

$$Q = -\tfrac{1}{n}\int\frac{\partial v\,[v\,\text{ſin.}\,\zeta - \text{ſin.}\,(\zeta-\omega)] + v\,\partial\Phi\,[v\,\text{coſ.}\,\zeta - \text{coſ.}\,(\zeta-\omega)]}{1 - 2v\,\text{coſ.}\,\omega + vv}.$$

Vbi quidem $\partial\Phi$ adhuc multiplicatur per vv, cujus loco ſcribi poſſet $2v\,\text{coſ.}\,\omega - 1$; verum omiſſa hac ſubſtitutione nullus error committitur.

§. 54. Videamus nunc, quomodo ipſa harum formularum integratio inſtitui queat. Ac primo quidem angulum Φ pro conſtante habeamus, vt ſit

$$P = -\tfrac{1}{n}\int\frac{\partial v\,[v\,\text{coſ.}\,\zeta - \text{coſ.}\,(\zeta-\omega)]}{1 - 2v\,\text{coſ.}\,\omega + vv} \text{ et}$$

$$Q = -\tfrac{1}{n}\int\frac{\partial v\,[v\,\text{ſin.}\,\zeta - \text{ſin.}\,(\zeta-\omega)]}{1 - 2v\,\text{coſ.}\,\omega + vv}.$$

Ponatur igitur

$$M = \int\frac{\partial v\,[v\,\text{coſ.}\,\zeta - \text{coſ.}\,(\zeta-\omega)]}{1 - 2v\,\text{coſ.}\,\omega + vv}, \text{ eritque}$$

$$M - \text{coſ.}\,\zeta\,l\,[\surd(1 - 2v\,\text{coſ.}\,\omega + vv)]$$

$=\int$

$$= \int \frac{\partial v\,[v \cos.\zeta - \cos.(\zeta - \omega)]}{1 - 2v \cos.\omega + vv} - \int \frac{(v \cos.\zeta - \cos.\zeta \cos.\omega)\,\partial v}{1 - 2v \cos.\omega + vv}$$

$$= \int \frac{\partial v\,[\cos.\zeta \cos.\omega - \cos.(\zeta - \omega)]}{1 - 2v \cos.\omega + vv} = - \int \frac{\partial v \sin.\zeta \sin.\omega}{1 - 2v \cos.\omega + vv},$$

ſicque integrale erit

$$- \sin.\zeta\, A\, \text{tang}.\, \frac{v \sin.\omega}{1 - v \cos.\omega}, \text{ ideoque}$$

$$M = \cos.\zeta\, l \sqrt{(1 - 2v \cos.\omega + vv)} - \sin.\zeta\, A\, \text{tang}.\, \frac{v \sin.\omega}{1 - v \cos.\omega},$$

conſequenter habebimus

$$P = - \frac{\cos.\zeta}{n}\, l \sqrt{(1 - 2v \cos.\omega + vv)} + \frac{\sin.\zeta}{n}\, A\, \text{tang}.\, \frac{v \sin.\omega}{1 - v \cos.\omega}.$$

§. 55. Hoc valore ex ſola variabilitate ipſius v orto, videamus quomodo cum angulo variabili Φ conſiſtat. Hunc in finem differentiemus hanc ipſam formulam inuentam, ſtatuendo ſolum angulum ω variabilem, ſiquidem $\partial\omega = -\partial\Phi$, ob angulum ζ conſtantem, eritque differentiale

$$- \frac{1}{n} \left[\frac{-v\,\partial\Phi \sin.\omega \cos.\zeta + v\,\partial\Phi (\cos.\omega - v) \sin.\zeta}{1 - 2v \cos.\omega + vv}\right] = \frac{1}{n} \left[\frac{(v \sin.\zeta - \sin.(\zeta - \omega))\, v\, \partial\Phi}{1 - 2v \cos.\omega + vv}\right],$$

quod prorſus conuenit cum forma propoſita, ita vt iuſtus valor pro P ſit

$$P = - \frac{\cos.\zeta}{n}\, l \sqrt{(1 - 2v \cos.\omega + vv)} + \frac{\sin.\zeta}{n}\, A\, \text{tang}.\, \frac{v \sin.\omega}{1 - v \cos.\omega}.$$

§. 56. Eodem modo procedamus pro valore Q, ſitque

$$M = \int \frac{\partial v\,[v \sin.\zeta - \sin.(\zeta - \omega)]}{1 - 2v \cos.\omega + vv}, \text{ eritque}$$

$$M - \sin.\zeta\, l \sqrt{(1 - 2v \cos.\omega + vv)} =$$

$$\int \frac{\partial v\,[v \sin.\zeta - \sin.(\zeta - \omega)]}{1 - 2v \cos.\omega + vv} - \int \frac{(v \sin.\zeta - \cos.\omega \sin.\zeta)\,\partial v}{1 - 2v \cos.\omega + vv} =$$

$$\int \frac{\partial v \cos.\zeta \sin.\omega}{1 - 2v \cos.\omega + vv} = \cos.\zeta\, A\, \text{tang}.\, \frac{v \sin.\omega}{1 - v \cos.\omega},$$

vnde manifeſto colligitur

$$Q = - \frac{\sin.\zeta}{n}\, l \sqrt{(1 - 2v \cos.\omega + vv)} - \frac{\cos.\zeta}{n}\, A\, \text{tang}.\, \frac{v \sin.\omega}{1 - v \cos.\omega}$$

quae expreſſio variabilitati ipſius Φ etiam eſt conſentanea.

§. 57.

§. 57. Nunc igitur caſum formulae $\int \frac{\partial z}{(1+z^3)}$, quem iam bis fruſtra ſumus aggreſſi, facile expedire licebit. Cum enim hic ſit $m = 1$ et $n = 3$, pro littera i tres ſumi debebunt valores 1, 3 et 5, vnde pro noſtris formulis integralibus ſequentes valores emergunt:

i	1	3	5
ω	$60^\circ - \Phi$	$180^\circ - \Phi$	$300^\circ - \Phi$
ſin. ω	ſin. $(60^\circ - \Phi)$	ſin. Φ	$-$ſin. $(60^\circ + \Phi)$
coſ. ω	coſ. $(60^\circ - \Phi)$	$-$coſ. Φ	coſ. $(60^\circ + \Phi)$
ζ	60°	180°	300°
ſin. ζ	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
coſ. ζ	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$

§. 58. Ex his iam ternis valoribus tam pro P quam Q ternas partes adipiſcemur, quae erunt:

Pro P

Pars I. $-\frac{1}{6} l \sqrt{[1 - 2v\,\text{coſ.}(60^\circ - \Phi) + vv]} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\text{A tang.} \frac{v\,\text{ſin.}(60^\circ - \Phi)}{1 - v\,\text{coſ.}(60^\circ - \Phi)}$,

Pars II. $+\frac{1}{3} l \sqrt{(1 + 2v\,\text{coſ.}\Phi + vv)} + 0$

Pars III. $-\frac{1}{6} l \sqrt{[1 - 2v\,\text{coſ.}(60^\circ + \Phi) + vv]} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\text{A tang.} \frac{v\,\text{ſin.}(60^\circ + \Phi)}{1 - v\,\text{coſ.}(60^\circ + \Phi)}$.

Vbi notaſſe iuuabit partem primam et tertiam ita coniunctim exprimi poſſe:

$$-\frac{1}{12} l [1 - 2v\,\text{coſ.}\Phi + 2vv(\tfrac{1}{2} + \text{coſ.}2\Phi) - 2v^3\,\text{coſ.}\Phi + v^4]$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\text{A tang.} \frac{2v\,\text{coſ.}\Phi\sqrt{3} - vv\sqrt{3}}{2 - 2v\,\text{coſ.}\Phi - vv}.$$

Pro Q

Pars I. $-\frac{1}{2\sqrt{3}} l \sqrt{[1 - 2v\,\text{coſ.}(60^\circ - \Phi) + vv]} - \frac{1}{6}\,\text{A tang.} \frac{v\,\text{ſin.}(60^\circ - \Phi)}{1 - v\,\text{coſ.}(60^\circ - \Phi)}$,

Pars II. $- 0 \qquad + \frac{1}{3}\,\text{A tang.} \frac{v\,\text{ſin.}\Phi}{1 + v\,\text{coſ.}\Phi}$,

Pars III. $+\frac{1}{2\sqrt{3}} l \sqrt{[1 - 2v\,\text{coſ.}(60^\circ + \Phi) + vv]} + \frac{1}{6}\,\text{A tang.} \frac{v\,\text{ſin.}(60^\circ + \Phi)}{1 - v\,\text{coſ.}(60^\circ + \Phi)}$.

Hic iterum partes prima et tertia contrahi poſſent, ſed praeſtabit formulis primo inuentis vti. Hinc iam iſtam tractationem ſequenti Theoremate concludemus.

Theorema.

§. 59. Poſito $z = v\,(\text{coſ.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi)$, ſi ſtatuatur $\int \frac{\partial z}{1 + z^3} = P + Q\sqrt{-1}$, hae quantitates P et Q ita exprimentur:

$$P = \begin{cases} -\frac{1}{6}\, l \sqrt{[1 - 2v\,\text{coſ.}(60^\circ - \Phi) + vv]} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\text{A tang.}\,\frac{v\,\text{ſin.}(60^\circ - \Phi)}{1 - v\,\text{coſ.}(60^\circ - \Phi)} \\ +\frac{1}{3}\, l \sqrt{[1 + 2v\,\text{coſ.}\,\Phi + vv]} \\ -\frac{1}{6}\, l \sqrt{[1 - 2v\,\text{coſ.}(60^\circ + \Phi) + vv]} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\text{A tang.}\,\frac{v\,\text{ſin.}(60^\circ + \Phi)}{1 - v\,\text{coſ.}(60^\circ - \Phi)} \end{cases}$$

$$Q = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{3}}\, l \sqrt{[1 - 2v\,\text{coſ.}(60^\circ - \Phi) + vv]} - \frac{1}{6}\,\text{A tang.}\,\frac{v\,\text{ſin.}(60^\circ - \Phi)}{1 - v\,\text{coſ.}(60^\circ - \Phi)} \\ \qquad + \frac{1}{3}\,\text{A tang.}\,\frac{v\,\text{ſin.}\,\Phi}{1 + v\,\text{coſ.}\,\Phi} \\ +\frac{1}{2\sqrt{3}}\, l \sqrt{[1 - 2v\,\text{coſ.}(60^\circ + \Phi) + vv]} + \frac{1}{6}\,\text{A tang.}\,\frac{v\,\text{ſin.}(60^\circ + \Phi)}{1 - v\,\text{coſ.}(60^\circ + \Phi)} \end{cases}.$$

Corollarium.

§. 60. Si ergo ſumamus angulum $\Phi = 0$, vt fiat $z = v$, pro formula integrali $\int \frac{\partial v}{1 + v^3} = P + Q\sqrt{-1}$ erit:

$$P = \begin{cases} -\frac{1}{6}\, l \sqrt{(1 - v + vv)} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\text{A tang.}\,\frac{v\sqrt{3}}{2 - v} \\ +\frac{1}{3}\, l \sqrt{(1 + v)} \\ -\frac{1}{6}\, l \sqrt{(1 - v + vv)} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\text{A tang.}\,\frac{v\sqrt{3}}{2 - v} \end{cases}$$

$$Q = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{3}}\, l \sqrt{(1 - v + vv)} - \frac{1}{6}\,\text{A tang.}\,\frac{v\sqrt{3}}{2 - v} \\ +\frac{1}{2\sqrt{3}}\, l \sqrt{(1 - v + vv)} + \frac{1}{6}\,\text{A tang.}\,\frac{v\sqrt{3}}{2 - v} \end{cases}.$$

Sicque erit $Q = 0$, vti natura rei poſtulat. Nam quia ipſa formula integranda eſt realis, etiam integrale partem imaginariam con-

continere nequit. Ceterum ipſum hoc integrale ſatis eſt notum.

Corollarium 2.

§. 61. Conſideremus etiam caſum quo $\Phi = 90^\circ$, ideoque $z = v\sqrt{-1}$, et formula integranda erit

$$\int \frac{\partial v\sqrt{-1}}{1 - v^3\sqrt{-1}} = P + Q\sqrt{-1};$$

quantitates vero P et Q ita exprimentur:

$$P = \begin{cases} -\frac{1}{6}\, l\sqrt{(1 - v\sqrt{3} + vv)} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\text{A tang.}\,\frac{v}{2 - v\sqrt{3}} \\ +\frac{1}{3}\, l\sqrt{(1 + vv)} \\ -\frac{1}{6}\, l\sqrt{(1 + v\sqrt{3} + vv)} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\text{A tang.}\,\frac{v}{2 + v\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$Q = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{3}}\, l\sqrt{(1 - v\sqrt{3} + vv)} + \frac{1}{6}\,\text{A tang.}\,\frac{v}{2 - v\sqrt{3}} \\ \qquad + \frac{1}{3}\,\text{A tang.}\, v \\ +\frac{1}{2\sqrt{3}}\, l\sqrt{(1 + v\sqrt{3} + vv)} + \frac{1}{6}\,\text{A tang.}\,\frac{v}{2 + v\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Corollarium 3.

§. 62. Praeterea vero etiam caſus memoratu dignus occurrit, quo $\Phi = 60^\circ$, ideoque $z = \frac{v}{2} + \frac{v\sqrt{-3}}{2}$ et $z^3 = -v^3$, ita vt formula integranda ſit $\frac{\partial v(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3})}{1 - v^3}$; tum igitur erit:

$$P = \begin{cases} -\frac{1}{6}\, l(1 - v) \\ +\frac{1}{3}\, l\sqrt{(1 + v + vv)} \\ -\frac{1}{6}\, l\sqrt{(1 + v + vv)} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\text{A tang.}\,\frac{v\sqrt{3}}{2 + v} \end{cases}$$

$$Q = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{3}}\, l(1 - v) \\ +\frac{1}{3}\,\text{A tang.}\,\frac{v\sqrt{3}}{2 + v} \\ +\frac{1}{2\sqrt{3}}\, l\sqrt{(1 + v + vv)} + \frac{1}{6}\,\text{A tang.}\,\frac{v\sqrt{3}}{2 + v}, \end{cases}$$

vbi manifeſto $P : Q = 1 : \sqrt{3}$, prorſus vti natura rei poſtulat.

SVPPLEMENTVM

ad diſſertationem praecedentem, circa integrationem formulae $\int \frac{z^{m-1}\partial z}{1-z^n}$, caſu quo ponitur

$$z = v(\text{coſ.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi).$$

§. 1. Reſolutio formulae $\int \frac{z^{m-1}\partial z}{1+z^n}$, quam ſupra in problemate, pro caſu quo $z = v(\text{coſ.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi)$ dedimus, eximia et notatu digniſſima artificia complectitur, quae animo firmius imprimere haud inutile erit. Cum igitur formula, quam hic tractandam ſuſcipimus, non minore attentione ſit digna quam ea quam ſupra tractauimus, eius integrale per eandem methodum exhibere conſtitui; vbi ſimul occaſionem inueniemus nouum compendium in calculo adhibendi.

Problema.

Si ponatur $z = v(\text{coſ.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi)$, *inueſtigare integrale huius formulae*: $\int \frac{z^{m-1}\partial z}{1-z^n}$.

Solutio.

§. 2. Cum ob valorem ipſius z imaginarium integrale quaeſitum etiam eſſe debeat imaginarium, id ſub forma $P + Q\sqrt{-1}$ complectamur, ita vt P et Q ſint quantitates reales. Hanc ob rem erit facta ſubſtitutione

$$\int \frac{z^{m-1}\partial z}{1-z^n} = P + Q\sqrt{-1}.$$

§. 3. Cum porro ſit $z = v(\text{coſ.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi)$, hincque $\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial v}{v} + \partial\Phi\sqrt{-1}$, erit numerator

Digitized by Google

$$z^{m-1}\partial z = v^m(\text{coſ.}\, m\Phi + \surd -1\ \text{ſin.}\, m\Phi)\left(\frac{\partial v}{v} + \partial\Phi\surd -1\right),$$

denominator vero erit

$$1 - v^n(\text{coſ.}\, n\Phi + \surd -1\ \text{ſin.}\, n\Phi),$$

qui ergo euaneſcit ponendo

$$v^n = \frac{1}{\text{coſ.}\, n\Phi + \surd -1\, \text{ſin.}\, n\Phi} = \text{coſ.}\, n\Phi - \surd -1\ \text{ſin.}\, n\Phi.$$

§. 4. Iam vt imaginaria ex denominatore tollantur, ſupra et infra multiplicemus per

$$1 - v^n(\text{coſ.}\, n\Phi - \surd -1\ \text{ſin.}\, \Phi),$$

ſicque fractio noſtra euoluenda erit

$$\partial V = \frac{z^{m-1}\partial z(1 - v^n\, \text{coſ.}\, n\Phi + v^n\surd -1\ \text{ſin.}\, n\Phi)}{1 - 2v^n\, \text{coſ.}\, n\Phi + v^{2n}}.$$

Quod ſi iam hic loco $z^{m-1}\partial z$ valor modo aſſignatus ſubſtituatur et partes reales ab imaginariis ſegregentur, ob

$$(\text{coſ.}\, m\Phi + \surd -1\ \text{ſin.}\, m\Phi)(\text{coſ.}\, n\Phi - \surd -1\ \text{ſin.}\, n\Phi)$$
$$= \text{coſ.}\,(m-n)\Phi + \surd -1\ \text{ſin.}\,(m-n)\Phi$$

prodibit pars realis ita expreſſa:

$$v^{m-1}\partial v\,[\text{coſ.}\, m\Phi - v^n\, \text{coſ.}\,(m-n)\Phi]$$
$$- v^m\partial\Phi\,[\text{ſin.}\, m\Phi - v^n\, \text{ſin.}\,(m-n)\Phi],$$

pars vero imaginaria per $\surd -1$ diuiſa:

$$v^{m-1}\partial v\,[\text{ſin.}\, m\Phi - v^n\, \text{ſin.}\,(m-n)\Phi]$$
$$+ v^m\partial\Phi\,(\text{coſ.}\, m\Phi - v^n\, \text{coſ.}\,(m-n)\Phi].$$

§. 5. Quod ſi iam breuitatis gratia ſtatuamus

$$R = v^{m-1}[\text{coſ.}\, m\Phi - v^n\, \text{coſ.}\,(m-n)\Phi] \text{ et}$$
$$S = v^{m-1}[\text{ſin.}\, m\Phi - v^n\, \text{coſ.}\,(m-n)\Phi],$$

ambae litterae quaeſitae P et Q per ſequentes formulas integrales exprimentur:

P =

Digitized by Google

$$P = \int \frac{R\,\partial v - S\,v\,\partial \Phi}{1 - 2\,v^n \operatorname{coſ.} n\,\Phi + v^{2n}} \text{ et}$$

$$Q = \int \frac{S\,\partial v + R\,v\,\partial \Phi}{1 - 2\,v^n \operatorname{coſ.} n\,\Phi + v^{2n}}.$$

Has igitur duas formulas integrare oportebit, quod fiet, dum denominatoris ſingulos factores trinomiales inueſtigabimus et ex ſingulis fractiones partiales inde oriundas definiemus.

§. 6. Conſideremus igitur in genere hanc fractionem: $\frac{N}{1 - 2\,v^n \operatorname{coſ.} n\,\Phi + v^{2n}}$, et fingamus denominatoris factorem eſſe $1 - 2\,v \operatorname{coſ.} \omega + v\,v$, vbi angulus ω ita debet eſſe comparatus, vt poſito

$1 - 2\,v \operatorname{coſ.} \omega + v\,v = 0$, ſiue
$v = \operatorname{coſ.} \omega + \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} \omega$,

ſimul quoque denominator euaneſcat, id quod fit, vti vidimus, quando $v^n = \operatorname{coſ.} n\,\Phi - \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} n\,\Phi$. At vero ex factore ſuppoſito fit $v^n = \operatorname{coſ.} n\,\omega + \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} n\,\omega$, vnde ſtatui debebit $\operatorname{coſ.} n\,\omega = \operatorname{coſ.} n\,\Phi$ et $\operatorname{ſin.} n\,\omega = -\operatorname{ſin.} n\,\Phi$, id quod euenit in genere quando $n\,\omega + n\,\Phi = i\,\pi$, denotante i omnes numeros pares, ſicque erit $n\,\omega = i\,\pi - n\,\Phi$, ideoque $\omega = \frac{i\pi}{n} - \Phi$, vnde n diuerſi valores pro angulo ω deducuntur, dum ſcilicet loco i ſcribuntur ſucceſſiue numeri 0, 2, 4, 6, etc. vsque ad $2\,n$, excluſo poſtremo.

§. 7. Ponamus nunc fractionem partialem ex iſto factore oriundam eſſe $\frac{F}{1 - 2\,v \operatorname{coſ.} \omega + v\,v}$, atque ex ſuperioribus patet ſtatui debere

$$F = \frac{N\,(1 - 2\,v \operatorname{coſ.} \omega + v\,v)}{1 - 2\,v^n \operatorname{coſ.} n\,\Phi + v^{2n}},$$

vnde

Digitized by Google

vnde ſcilicet ope aequationis $vv - 2v\,\text{coſ.}\,\omega + 1 = 0$ pro F huiusmodi forma $Av + B$ elici debet. Quoniam vero hoc caſu tam numerator quam denominator euaneſcit, differentialibus in ſubſidium vocatis fiet

$$F = \frac{N(v - \text{coſ.}\,\omega)}{n v^{n-1}(v^n - \text{coſ.}\,n\Phi)}.$$

§. 8. Cum nunc caſu quo $vv - 2v\,\text{coſ.}\,\omega + 1 = 0$ ſit

$v - \text{coſ.}\,\omega = \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\omega$ et

$v^n - \text{coſ.}\,n\Phi = -\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,n\Phi$, erit

$$F = -\frac{N v\,\text{ſin.}\,\omega}{n v^n\,\text{ſin.}\,n\Phi},$$

qui valor prorſus conuenit cum eo qui ſupra eſt repertus. Hic igitur tantum opus eſt, vt loco N ſiue R ſiue S ſubſtituatur, indeque forma praeſcripta pro iſto numeratore F deriuetur, in vſum vocando lemma ſupra allatum

Euolutio fractionis

$$\frac{R v\,\text{ſin.}\,\omega}{n v^n\,\text{ſin.}\,n\Phi} \text{ ſiue } \frac{v^m\,\text{ſin.}\,\omega[\text{coſ.}\,m\Phi - v^n\,\text{coſ.}\,(m-n)\Phi]}{n v^n\,\text{ſin.}\,n\Phi}.$$

§. 9. Hinc ergo erit

$$F = -\frac{v^{m-n}\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,m\Phi + v^m\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,(m-n)\Phi}{n\,\text{ſin.}\,n\Phi},$$

Per lemma autem memoratum habebitur

$$\text{ſin.}\,\omega\, v^{m-n} = v\,\text{ſin.}\,(m-n)\omega - \text{ſin.}\,(m-n-1)\omega.$$

Cum igitur ſit $n\omega = i\pi - n\Phi$, erit

$\text{ſin.}\,(m-n)\omega = \text{ſin.}\,(m\omega + n\Phi)$ et

$\text{ſin.}\,(m-n-1)\omega = \text{ſin.}\,[(m-1)\omega + n\Phi]$.

Deinde vero eſt

$$\text{ſin.}\,\omega.\,v^m = v\,\text{ſin.}\,m\,\omega - \text{ſin.}\,(m-1)\,\omega,$$

quibus valoribus ſubſtitutis erit

$$F = -\frac{1}{n\,\text{ſin.}\,n\,\Phi}\left[\begin{matrix} v\,\text{coſ.}\,m\,\Phi\,\text{ſin.}\,(m\,\omega + n\,\Phi) - \text{coſ.}\,m\,\Phi\,\text{ſin.}\,[(m-1)\,\omega + n\,\Phi] \\ - v\,\text{ſin.}\,m\,\omega\,\text{coſ.}\,(m-n)\,\Phi] + \text{ſin.}\,(m-1)\,\omega\,\text{coſ.}\,(m-n)\,\Phi \end{matrix}\right].$$

Facta iam euolutione formularum

$$\text{ſin.}\,(m\,\omega + n\,\Phi) = \text{ſin.}\,m\,\omega\,\text{coſ.}\,n\,\Phi + \text{coſ.}\,m\,\omega\,\text{ſin.}\,n\,\Phi \text{ et}$$

$$\text{coſ.}\,(m-n)\,\Phi = \text{coſ.}\,m\,\Phi\,\text{coſ.}\,n\,\Phi + \text{ſin.}\,m\,\Phi\,\text{ſin.}\,n\,\Phi,$$

littera v hic multiplicatur per hanc formam:

$$\text{ſin.}\,n\,\Phi\,\text{coſ.}\,m\,\Phi\,\text{coſ.}\,m\,\omega - \text{ſin.}\,n\,\Phi\,\text{ſin.}\,m\,\Phi\,\text{ſin.}\,m\,\omega$$
$$= \text{ſin.}\,n\,\Phi\,\text{coſ.}\,(m\,\Phi + m\,\omega),$$

reliqui vero termini, quia ab his tantum in eo differunt vt loco $m\,\omega$ ſcribi debeat $(m-1)\,\omega$, erunt:

$$- \text{ſin.}\,n\,\Phi\,\text{coſ.}\,[m\,(\omega + \Phi) - \omega]$$

ſicque pro numeratore quem quaerimus erit

$$F = -\frac{1}{n}\,v\,\text{coſ.}\,m\,(\omega + \Phi) + \frac{1}{n}\,\text{coſ.}\,[m\,(\omega + \Phi) - \omega].$$

Euolutio fractionis

$$\frac{\Sigma\,v\,\text{ſin.}\,\omega}{n\,v^n\,\text{ſin.}\,n\,\Phi} = \frac{v^m\,\text{ſin.}\,\omega\,[\text{ſin.}\,m\,\Phi - v^n\,\text{ſin.}\,(m-n)\,\Phi]}{n\,v^n\,\text{ſin.}\,n\,\Phi}.$$

§. 10. Hoc caſu erit

$$F = -\frac{v^{m-n}\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{ſin.}\,m\,\Phi + v^m\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{ſin.}\,(m-n)\,\Phi}{n\,\text{ſin.}\,n\,\Phi}.$$

Hic igitur eodem lemmate in ſubſidium vocato erit

$$F = -\frac{1}{n\,\text{ſin.}\,n\,\Phi}\left[\begin{matrix} v\,\text{ſin.}\,m\,\Phi\,\text{ſin.}\,(m\,\omega + n\,\Phi) - \text{ſin.}\,m\,\Phi\,\text{ſin.}\,[(m-1)\,\omega + n\,\Phi] \\ - v\,\text{ſin.}\,(m-n)\,\Phi\,\text{ſin.}\,m\,\omega + \text{ſin.}\,(m-n)\,\Phi\,\text{ſin.}\,(m-1)\,\omega \end{matrix}\right];$$

vbi per ſimilem euolutionem quantitas, qua v multiplicatur, inuenitur $= \text{ſin.}\,n\,\Phi\,\text{ſin.}\,[m\,(\omega + \Phi)]$; reliqua vero pars erit

$- \text{ſin.}\, n\, \Phi\, \text{ſin.}\, [m\, (\omega + \Phi) - \omega]$,

hinc igitur pro littera S valor quaeſitus numeratoris erit

$$F = -\tfrac{1}{n} v\, \text{ſin.}\, m\, (\omega + \Phi) + \tfrac{1}{n}\, \text{ſin.}\, [m\, (\omega + \Phi) - \omega].$$

§. 11. Cum igitur ſit $\omega + \Phi = \frac{i\pi}{n}$, ponamus breuitatis gratia angulum $m\, (\omega + \Phi) = \frac{mi\pi}{n} = \zeta$, atque pro littera R erit

$$F = -\tfrac{1}{n} [v\, \text{coſ.}\, \zeta - \text{coſ.}\, (\zeta - \omega)]$$

at vero pro S erit

$$F = -\tfrac{1}{n} [v\, \text{ſin.}\, \zeta - \text{ſin.}\, (\zeta - \omega)],$$

quibus valoribus inuentis pro denominatoris factore $1 - 2v\,\text{coſ.}\,\omega + vv$ partes, ex quibus litterae P et Q componuntur, per ſequentes formulas integrales exprimentur:

$$P = -\frac{1}{n}\int \frac{[v\, \text{coſ.}\, \zeta - \text{coſ.}\, (\zeta - \omega)]\, \partial v - v\, \partial \Phi\, [v\, \text{ſin.}\, \zeta - \text{ſin.}\, (\zeta - \omega)]}{1 - 2v\, \text{coſ.}\, \omega + vv}$$

$$Q = -\frac{1}{n}\int \frac{[v\, \text{ſin.}\, \zeta - \text{ſin.}\, (\zeta - \omega)]\, \partial v + v\, \partial \Phi\, [v\, \text{coſ.}\, \zeta - \text{coſ.}\, (\zeta - \omega)]}{1 - 2v\, \text{coſ.}\, \omega + vv}.$$

§. 12. Quoniam hae formulae prorſus conueniunt cum iis, quas ſupra ſumus nacti, et ne ſigna quidem ſunt immutata, peculiari integratione non indigemus, ſed pro quantitatibus P et Q ſequentes habebimus valores integratos:

$$P = -\frac{\text{coſ.}\, \zeta}{n}\, l \surd (1 - 2v\, \text{coſ.}\, \omega + vv) + \frac{\text{ſin.}\, \zeta}{n}\, \text{A tang.}\, \frac{v\, \text{ſin.}\, \omega}{1 - v\, \text{coſ.}\, \omega} \quad \text{et}$$

$$Q = -\frac{\text{ſin.}\, \zeta}{n}\, l \surd (1 - 2v\, \text{coſ.}\, \omega + vv) - \frac{\text{coſ.}\, \zeta}{n}\, \text{A tang.}\, \frac{v\, \text{ſin.}\, \omega}{1 - v\, \text{coſ.}\, \omega}.$$

Tales ſcilicet formulae ex ſingulis factoribus denominatoris formae $1 - 2v\, \text{coſ.}\, \omega + vv$ deriuari et in vnam ſummam colligi debent, vt veri valores pro P et Q obtineantur, vbi tantum recordari oportet eſſe $\omega = \frac{i\pi}{n} - \Phi$ et $\zeta = \frac{mi\pi}{n}$; pro i autem hic numeros pares accipi oportet.

Digitized by Google

Exemplum 1.

§. 13. *Sit* $m = 1$ *et* $n = 1$, *ita vt quaeri debeat* $\int \frac{\partial z}{1-z} = P + Q\sqrt{-1}$, *poſito ſcilicet* $z = v\,(\text{coſ.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi)$.

Quia hic $n = 1$, vnicus valor pro ω locum habet, reſultans ex $i = 0$, eritque ergo $\omega = -\Phi$ et $\zeta = 0$, vnde ſtatim colligimus

$$P = -l\sqrt{(1 - 2v\,\text{coſ.}\,\Phi + vv)} \text{ et } Q = -\text{A tang.}\,\frac{v\,\text{ſin.}\,\Phi}{1 - v\,\text{coſ.}\,\Phi}.$$

Exemplum 2.

§. 14. *Sit* $m = 1$ *et* $n = 2$, *ideoque formula integranda* $\int \frac{\partial z}{1-zz} = P + Q\sqrt{-1}$, *poſito* $z = v\,(\text{coſ.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi)$.

Quia hic eſt $n = 2$, pro ω duos habebimus valores ex $i = 0$ et $i = 2$ oriundos, vnde

Si $i = 0$, erit $\omega = -\Phi$ et $\zeta = 0$

Si $i = 2$, erit $\omega = \pi - \Phi$ et $\zeta = \pi$.

Hinc igitur ſtatim colligemus

$$P = \begin{cases} -\frac{1}{2}l\sqrt{(1 - 2v\,\text{coſ.}\,\Phi + vv)} + 0 \\ +\frac{1}{2}l\sqrt{(1 + 2v\,\text{coſ.}\,\Phi + vv)} + 0. \end{cases}$$

$$Q = \begin{cases} 0 + \frac{1}{2}\,\text{A tang.}\,\frac{v\,\text{ſin.}\,\Phi}{1 - v\,\text{coſ.}\,\Phi} \\ 0 + \frac{1}{2}\,\text{A tang.}\,\frac{v\,\text{ſin.}\,\Phi}{1 + v\,\text{coſ.}\,\Phi}. \end{cases}$$

Exemplum 3.

§. 15. *Sit nunc* $m = 2$ *et* $n = 2$, *ideoque formula integranda* $\int \frac{z\,\partial z}{1-zz} = P + Q\sqrt{-1}$, *poſito ſcilicet* $z = v(\text{coſ.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi)$.

Hic ergo primo ſumi debet $i = 0$, tum vero $i = 2$, vnde

Si $i = 0$, erit $\omega = -\Phi$ et $\zeta = 0$

Si $i = 2$, erit $\omega = \pi - \Phi$ et $\zeta = 2\pi$

vnde valores pro P et Q eruuntur ſequentes

P =

Digitized by Google

$$P = \begin{cases} -\tfrac{1}{2} l \surd (1 - 2v \operatorname{coſ}.\Phi + vv) - 0 \\ -\tfrac{1}{2} l \surd (1 + 2v \operatorname{coſ}.\Phi + vv) - 0. \end{cases}$$

$$Q = \begin{cases} 0 + \tfrac{1}{2}\, \text{A tang.} \frac{v \operatorname{ſin}.\Phi}{1 - v \operatorname{coſ}.\Phi} \\ 0 - \tfrac{1}{2}\, \text{A tang.} \frac{v \operatorname{ſin}.\Phi}{1 - v \operatorname{coſ}.\Phi}. \end{cases}$$

Exemplum 4.

§. 16. *Sit* $m = 1$ *et* $n = 3$, *ideoque formula integranda* $\int \frac{\partial z}{1 - z^3} = P + Q\surd - 1$, *poſito* $z = v(\operatorname{coſ}.\Phi + \surd - 1 \operatorname{ſin}.\Phi)$.

Hic igitur ternos valores pro angulo ω habebimus, quos ſequenti modo repraeſentemus:

i	0	2	4
ω	$-\Phi$	$120^\circ - \Phi$	$240^\circ - \Phi$
ſin. ω	$-$ ſin. Φ	$+$ ſin. $(60^\circ + \Phi)$	$-$ ſin. $(60^\circ - \Phi)$
coſ. ω	$+$ coſ. Φ	$-$ coſ. $(60^\circ + \Phi)$	$+$ coſ. $(60^\circ - \Phi)$
ζ	0	120°	240
ſin. ζ	0	$+\frac{\surd 3}{2}$	$-\frac{\surd 3}{2}$
coſ. ζ	$+1$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Hinc ergo inueniemus

$$P = \begin{cases} -\tfrac{1}{3} l \surd (1 - 2v \operatorname{coſ}.\Phi + vv) + 0 \\ +\tfrac{1}{6} l \surd [1 + 2v \operatorname{coſ}.(60^\circ + \Phi) + vv] + \frac{1}{2\surd 3}\, \text{A tang.} \frac{v \operatorname{ſin}.(60^\circ + \Phi)}{1 + v \operatorname{coſ}.(60^\circ + \Phi)} \\ +\tfrac{1}{6} l \surd [1 + 2v \operatorname{coſ}.(60^\circ - \Phi) + vv] + \frac{1}{2\surd 3}\, \text{A tang.} \frac{v \operatorname{ſin}.(60^\circ - \Phi)}{1 + v \operatorname{coſ}.(60^\circ - \Phi)}. \end{cases}$$

$$Q = \begin{cases} 0 \qquad + \tfrac{1}{3}\, \text{A tang.} \frac{v \operatorname{ſin}.\Phi}{1 - v \operatorname{coſ}.\Phi} \\ -\frac{1}{2\surd 3} l \surd [1 + 2v \operatorname{coſ}.(60^\circ + \Phi) + vv] + \tfrac{1}{6}\, \text{A tang.} \frac{v \operatorname{ſin}.(60^\circ + \Phi)}{1 + v \operatorname{coſ}.(60^\circ + \Phi)} \\ +\frac{1}{2\surd 3} l \surd [1 + 2v \operatorname{coſ}.(60^\circ - \Phi) + vv] - \tfrac{1}{6}\, \text{A tang.} \frac{v \operatorname{ſin}.(60^\circ - \Phi)}{1 + v \operatorname{coſ}.(60^\circ - \Phi)}. \end{cases}$$

Exemplum 5.

§. 17. *Sumatur nunc* $m = 2$, *manente* $n = 3$, *vt formula integranda ſit* $\int \frac{z\,\partial z}{1-z^3} = P + Q\sqrt{-1}$, *poſito* $z = v(\text{coſ.}\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\Phi)$.

Hic notetur, valores i[illegible] prorſus eosdem manere vt ante, ſicque [illegible]am logarithmi et arcus circulares iidem manebunt: [illegible]ores autem pro ζ erunt ſequentes:

Si $i = 0$, erit $\zeta = 0$, $\text{ſin.}\,\zeta = 0$ et $\text{coſ.}\,\zeta = +1$.
Si $i = 2$, erit $\zeta = \frac{4}{3}\pi$, $\text{ſin.}\,\zeta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\text{coſ.}\,\zeta = -\frac{1}{2}$.
Si $i = 4$, erit $\zeta = \frac{8}{3}\pi$, $\text{ſin.}\,\zeta = +\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\text{coſ.}\,\zeta = -\frac{1}{2}$.

Hinc igitur fiet

$$P = \begin{cases} -\frac{1}{3} l\sqrt{(1 - 2v\,\text{coſ.}\Phi + vv)} + 0 \\ +\frac{1}{6} l\sqrt{[1 - 2v\,\text{coſ.}(60^\circ + \Phi) + vv]} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\text{A tang.}\,\frac{v\,\text{ſin.}(60^\circ + \Phi)}{1 + v\,\text{coſ.}(60^\circ + \Phi)} \\ +\frac{1}{6} l\sqrt{[1 + 2v\,\text{coſ.}(60^\circ - \Phi) + vv]} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\text{A tang.}\,\frac{v\,\text{ſin.}(60^\circ - \Phi)}{1 + v\,\text{coſ.}(60^\circ - \Phi)}. \end{cases}$$

$$Q = \begin{cases} 0 \qquad\qquad + \frac{1}{3}\,\text{A tang.}\,\frac{v\,\text{ſin.}\Phi}{1 - v\,\text{coſ.}\Phi} \\ +\frac{1}{2\sqrt{3}} l\sqrt{[1 + 2v\,\text{coſ.}(60^\circ + \Phi) + vv]} + \frac{1}{6}\,\text{Atang.}\,\frac{v\,\text{ſin.}(60^\circ + \Phi)}{1 + v\,\text{coſ.}(60^\circ + \Phi)} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} l\sqrt{[1 + 2v\,\text{coſ.}(60^\circ - \Phi) + vv]} + \frac{1}{6}\,\text{Atang.}\,\frac{v\,\text{ſin.}(60^\circ - \Phi)}{1 + v\,\text{coſ.}(60^\circ - \Phi)}. \end{cases}$$

Exemplum 6.

§. 18. *Sit nunc* $m = 1$ *et* $n = 4$, *vt formula integranda fiat* $\int \frac{\partial z}{1-z^4} = P + Q\sqrt{-1}$, *poſito* $z = v\,(\text{coſ.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi)$.

Quia hic $n = 4$, pro angulis ω et ζ quaternos valores adipiſcimur, ſcilicet

i	0	2	4	0
ω	$-\Phi$	$\frac{1}{2}\pi-\Phi$	$\pi-\Phi$	$\frac{3}{2}\pi-\Phi$
ſin. ω	$-$ ſin. Φ	$+$ coſ. Φ	$+$ ſin. Φ	$-$ coſ. Φ
coſ. ω	$+$ coſ. Φ	$+$ ſin. Φ	$-$ coſ. Φ	$-$ ſin. Φ
ζ	0	90°	180°	270°
ſin. ζ	0	$+1$	0	-1
coſ ζ	$+1$	0	-1	0

Hinc jam litterae P et Q ſequenti modo exprimentur:

$$P=\begin{cases}-\frac{1}{4}l\sqrt{(1-2v\,\text{coſ.}\Phi+vv)}+0\\ 0\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+\frac{1}{4}\,\text{A tang.}\,\frac{v\,\text{coſ.}\Phi}{1-v\,\text{ſin.}\Phi}\\ +\frac{1}{4}l\sqrt{(1+2v\,\text{coſ.}\Phi+vv)}+0\\ 0\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+\frac{1}{4}\,\text{A tang.}\,\frac{v\,\text{coſ.}\Phi}{1+v\,\text{ſin.}\Phi}\,.\end{cases}$$

$$Q=\begin{cases}0\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+\frac{1}{4}\,\text{A tang.}\,\frac{v\,\text{ſin.}\Phi}{1-v\,\text{coſ.}\Phi}\\ -\frac{1}{4}l\sqrt{(1-2v\,\text{ſin.}\Phi+vv)}+0\\ 0\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+\frac{1}{4}\,\text{A tang.}\,\frac{v\,\text{ſin.}\Phi}{1+v\,\text{coſ.}\Phi}\\ +\frac{1}{4}l\sqrt{(1+2v\,\text{ſin.}\Phi+vv)}+0.\end{cases}$$

§. 19. Super hoc exemplo notaſſe juuabit eſſe

$$\int\frac{\partial z}{1-z^4}=\frac{1}{2}\int\frac{\partial z}{1-zz}+\frac{1}{2}\int\frac{\partial z}{1+zz}\,.$$

Modo autem vidimus pro formula $\int\frac{\partial z}{1-zz}$ eſſe

$$P=-\frac{1}{2}l\sqrt{(1-2v\,\text{coſ.}\Phi+vv)}+\frac{1}{2}l\sqrt{(1+2v\,\text{coſ.}\Phi+vv)}\ \text{et}$$

$$Q=+\frac{1}{2}\,\text{A tang.}\,\frac{v\,\text{ſin.}\Phi}{1-v\,\text{coſ.}\Phi}\qquad+\frac{1}{2}\,\text{A tang.}\,\frac{v\,\text{ſin.}\Phi}{1+v\,\text{coſ.}\Phi}\,.$$

Pro altera vero formula $\int\frac{\partial z}{1+zz}$ in ſuperiore diſſertatione §. 30. et ſeqq. inuenimus

$$P=\frac{1}{2}\,\text{A tang.}\,\frac{2v\,\text{coſ.}\Phi}{1-vv}\ \text{et}\ Q=\frac{1}{4}l\,\frac{1+2v\,\text{ſin.}\Phi+vv}{1-2v\,\text{ſin.}\Phi+vv}$$

quos autem valores ob arcum circuli hic contractum potius ex formulis problematis generalis §. 54. et ſeqq. deriuemus.

Erit

Digitized by Google

Erit enim, poſito ibi $m = 1$, $n = 2$, pro forma integrali $\int \frac{\partial z}{1 + zz}$ valor

$$P = \tfrac{1}{2}\,A\,tang.\,\frac{v\,coſ.\,\Phi}{1 - v\,ſin.\,\Phi} + \tfrac{1}{2}\,A\,tang.\,\frac{v\,coſ.\,\Phi}{1 + v\,ſin.\,\Phi}$$

$$Q = -\tfrac{1}{2}\,l\sqrt{(1 + 2v\,ſin.\,\Phi + vv)} - \tfrac{1}{2}\,l\sqrt{(1 - 2v\,ſin.\,\Phi + vv)}.$$

Additis ergo binis P et Q per binarium diuiſis prodit pro forma integrali $\int \frac{\partial z}{1 - z^4}$ valor

$$P = \begin{cases} +\tfrac{1}{4}\,l\sqrt{(1 + 2v\,coſ.\,\Phi + vv)} + \tfrac{1}{4}\,A\,tang.\,\frac{v\,coſ.\,\Phi}{1 - v\,ſin.\,\Phi} \\ -\tfrac{1}{4}\,l\sqrt{(1 - 2v\,coſ.\,\Phi + vv)} + \tfrac{1}{4}\,A\,tang.\,\frac{v\,coſ.\,\Phi}{1 + v\,ſin.\,\Phi} \end{cases}.$$

$$Q = \begin{cases} +\tfrac{1}{4}\,l\sqrt{(1 + 2v\,ſin.\,\Phi + vv)} + \tfrac{1}{4}\,A\,tang.\,\frac{v\,ſin.\,\Phi}{1 - v\,coſ.\,\Phi} \\ -\tfrac{1}{4}\,l\sqrt{(1 - 2v\,ſin.\,\Phi + vv)} + \tfrac{1}{4}\,A\,tang.\,\frac{v\,ſin.\,\Phi}{1 + v\,coſ.\,\Phi} \end{cases}$$

prorſus vti ſupra inuenimus.

§. 20. Quanquam haec ſolutio ſatis eſt commoda et ſine multis ambagibus ad optatum finem perducit, tamen aliam hic ſubjungam, quae quidem multo ſimplicior et breuior, ita tamen eſt comparata, vt ejus bonitas nequidem perſpici queat, atque eatenus tantum admitti poſſit, quatenus ad veritatem jam aliunde cognitam perducit. In eo autem iſta ſolutio a praecedente ſolutione recedit, quod primo denominatorem $1 - z^n$ ab imaginariis liberare non eſt opus; deinde etiam numerator ita tractari poteſt, vt quantitas v inde penitus elidatur, neque permixtio quantitatum realium et imaginariarum vllam moram faceſſat.

Alia ſolutio Problematis.

§. 21. Cum poſito $z = v\,(coſ.\,\Phi + \sqrt{-1}\,ſin.\,\Phi)$ eſſe debeat

$$\int \frac{z^{m-1}\,\partial z}{1 - z^n} = P + Q\sqrt{-1},$$

ſtatim

ſtatim conſidero denominatoris factorem $1 - 2 v \cos. \omega + v v$, quo ergo poſito $= 0$ etiam ipſe denominator euaneſcere debet; inde autem fit $v = \cos. \omega + \sqrt{-1} \sin. \omega$, et cum ſit

$$z = v (\cos. \Phi + \sqrt{-1} \sin. \Phi), \text{ erit}$$

$$z^n = v^n (\cos. n \Phi + \sqrt{-1} \sin. n \Phi).$$

Quare cum ſit $v^n = \cos. n \omega + \sqrt{-1} \sin. n \omega$, hinc fiet

$$z^n = \cos. (n \omega + n \Phi) + \sqrt{-1} \sin. (n \omega + n \Phi),$$

quae expreſſio cum vnitati debeat eſſe aequalis, erit $\cos. (n \omega + n \Phi) = 1$, vnde fit $n \omega + n \Phi = i \pi$, denotante i numerum parem quemqunque, ſicque altera pars $\sqrt{-1} \sin. (n\omega + n\Phi)$ ſponte euaneſcit. Cum igitur hinc ſit $n \omega = i \pi - n \Phi$, erit $\omega = \frac{i \pi}{n} - \Phi$, vnde n diuerſi valores pro ω eliciuntur.

§. 22. Statuamus nunc fractionem partialem ex hoc factore oriundam eſſe $= \frac{F}{1 - 2 v \cos. \omega + v v}$, atque vt ſupra vidimus, ſtatui debet

$$F = z^{m-1} \partial z . \frac{1 - 2 v \cos. \omega + v v}{1 - z^n},$$

vnde ope aquationis $v v - 2 v \cos. \omega + 1 = 0$ iſte valor F penitus a litteris z et v debet liberari. Quoniam autem hinc fractionis illius tam numerator quam denominator euaneſcit, ſumtis differentialibus, ob $\partial . z^n = n z^n \frac{\partial z}{z} = n z^n \frac{\partial v}{v}$, quandoquidem in hac reductione anguli ω et Φ vt conſtantes ſpectari poſſunt, illa fractio induet hanc formam: $\frac{2 (v - \cos. \omega) v}{n z^n}$.

Quoniam igitur $v - \cos. \omega = \sqrt{-1} \sin. \omega$ et $z^n = 1$, erit iſta fractio $= - \frac{2 v \sqrt{-1} \sin. \omega}{n}$, ſicque habebimus

$$F = - \frac{2 v}{n} z^{m-1} \partial z \sqrt{-1} \sin. \omega.$$

Digitized by Google

§. 23. Cum nunc, ſumto etiam angulo Φ variabili, ſit $\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial v}{v} + \partial \Phi \sqrt{-1}$, ideoque

$$\frac{2 v \sqrt{-1}}{n} \cdot \frac{\partial z}{z} = \frac{2}{n} \partial v \sqrt{-1} - 2 v \frac{\partial \Phi}{n},$$

habebimus

$$F = -\frac{2}{n} z^m \partial v \sqrt{-1} \text{ ſin. } \omega + \frac{2}{n} v z^m \partial \Phi \text{ ſin. } \omega, \text{ ſiue}$$

$$F = \frac{2}{n} z^m \text{ ſin. } \omega (v \partial \Phi - \partial v \sqrt{-1}).$$

Nunc vero, vti ante euoluimus poteſtatem z^n, hic ſimili modo euoluamus poteſtatem z^m, eritque

$$z^m = \text{coſ. } (m \omega + m \Phi) + \sqrt{-1} \text{ ſin. } (m \omega + m \Phi),$$

quo valore introducto fiet

$$F = \frac{2}{n} \text{ ſin. } \omega (v \partial \Phi - \partial v \sqrt{-1}) [\text{coſ. } (m \omega + m \Phi) + \sqrt{-1} \text{ ſin. } (m \omega + m \Phi)].$$

Cum denique ſit $\omega = \frac{i \pi}{n} - \Phi$, erit $m \omega + m \Phi = \frac{m i \pi}{n}$, quem ergo angulum ſi vocemus $= \zeta$, valor litterae F quaeſitus erit

$$F = \frac{2}{n} \text{ ſin. } \omega (v \partial \Phi - \partial v \sqrt{-1}) (\text{coſ. } \zeta + \sqrt{-1} \text{ ſin. } \zeta),$$

quem partiamur in has partes:

$$F = + \frac{2}{n} \partial v \text{ ſin. } \omega (\text{ſin. } \zeta - \sqrt{-1} \text{ coſ. } \zeta)$$
$$+ \frac{2}{n} v \partial \Phi \text{ ſin. } \omega (\text{coſ. } \zeta + \sqrt{-1} \text{ ſin. } \zeta).$$

§. 24. Quia haec expreſſio ex partibus realibus et imaginariis conſtat, videri poſſet partes reales ſumi debere pro valore litterae P, imaginarias pro $Q \sqrt{-1}$; verum hinc in craſſiſſimum errorem illaberemur, quemadmodum ex collatione cum ſuperiore ſolutione manifeſtum eſt. Interim tamen obſeruaui, ex hac ipſa formula veros valores pro P et Q elici poſſe. Scilicet pro valore ipſius P inueniendo haec tota formula ex realibus et imaginariis permixta in valorem realem transformetur; tum enim eius ſemiſſis pro littera P valebit. Simili modo pro littera Q eandem expreſſionem totam in formam ſim-

pliciￚ

plicter imaginariam transfundi oportet, cuius pariter ſemiſſis pro valore litterae Q adhiberi debebit; ſcilicet cum valor ipſius F coëfficientem habeat 2, ex altera ſemiſſi littera P, ex altera vero littera Q formari debet.

§. 25. Hinc ergo omiſſo factore formulam pro F inventam primo ad litteram P accomodemus, qui valor cum debeat eſſe realis, ſtatuatur $= A v + B$, et loco v valorem $\cos.\omega + \sqrt{-1}\sin.\omega$ ſubſtituendo habebimus hanc aequationem:

$$\left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{n}\partial v \sin.\omega(\sin.\zeta - \sqrt{-1}\cos.\zeta) \\ +\frac{1}{n} v\partial\Phi\sin.\omega(\cos.\zeta + \sqrt{-1}\sin.\zeta) \end{array}\right\} = A\cos.\omega + B + A\sqrt{-1}\sin.\omega.$$

Hinc iam partibus realibus et imaginariis ſeorſim aequatis primo ex imaginariis elicitur:

$$A\sin.\omega = \tfrac{1}{n}\sin.\omega(-\partial v\cos.\zeta + v\partial\Phi\sin.\zeta),$$

vnde fit

$$A = -\tfrac{1}{n}(\partial v\cos.\zeta - v\partial\Phi\sin.\zeta).$$

Hic iam valor in aequalitate partium realium ſubſtitutus dabit

$$\tfrac{1}{n}\sin.\omega(\partial v\sin.\zeta + v\partial\Phi\cos.\zeta) = -\tfrac{\cos.\omega}{n}(\partial v\cos.\zeta - v\partial\Phi\sin.\zeta) + B$$

vnde colligitur

$$B = \tfrac{1}{n}\partial v\cos.(\zeta - \omega) - \tfrac{1}{n}v\partial\Phi\sin.(\zeta - \omega).$$

Hinc ergo pro littera P erit

$$F = -\tfrac{1}{n}\partial v[v\cos.\zeta - \cos.(\zeta - \omega)] + \tfrac{1}{n}v\partial\Phi[v\sin.\zeta - \sin.(\zeta - \omega)],$$

ſicque ex factore denominatoris $1 - 2v\cos.\omega + vv$ habebimus

$$P = -\tfrac{1}{n}\int\frac{\partial v[v\cos.\zeta - \cos.(\zeta - \omega) - v\partial\Phi[v\sin.\zeta - \sin.(\zeta - \omega)]}{1 - 2v\cos.\omega + vv}.$$

§. 26. Pro littera Q altera ſemiſſis litterae F aequetur huic quantitati ſimpliciter imaginariae: $(Cv + D)\sqrt{-1}$, vnde exorietur iſta aequatio:

$$\left.\begin{array}{l}+\tfrac{1}{n}\partial v\,\text{ſin.}\,\omega(\text{ſin.}\,\zeta-\sqrt{-1}\,\text{coſ.}\,\zeta)\\+\tfrac{1}{n}v\partial\Phi\,\text{ſin.}\,\omega\,(\text{coſ.}\,\zeta+\sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\zeta)\end{array}\right\}=C\,\text{coſ.}\,\omega\sqrt{-1}+D\sqrt{-1}-C\,\text{ſin.}\,\omega.$$

Hinc ex partibus realibus concluditur

$$C=-\tfrac{1}{n}(\partial v\,\text{ſin.}\,\zeta+v\,\partial\Phi\,\text{coſ.}\,\zeta),$$

quo valore ſubſtituto ex partibus imaginariis haec emerget aequatio:

$$-\tfrac{1}{n}\text{ſin.}\,\omega(\partial v\,\text{coſ.}\,\zeta-v\partial\Phi\,\text{ſin.}\,\zeta)=-\tfrac{\text{coſ.}\,\omega}{n}(\partial v\,\text{ſin.}\,\zeta+v\partial\Phi\,\text{coſ.}\,\zeta)+D,$$

vnde eruitur

$$D=\tfrac{1}{n}\partial v\,\text{ſin.}\,(\zeta-\omega)+\tfrac{1}{n}v\,\partial\Phi\,\text{coſ.}\,(\zeta-\omega).$$

Hinc ergo pro littera Q habemus:

$$F=-\tfrac{1}{n}\partial v\,[v\,\text{ſin.}\,\zeta-\text{ſin.}\,(\zeta-\omega)]$$
$$-\tfrac{1}{n}v\,\partial\Phi\,[v\,\text{coſ.}\,\zeta-\text{coſ.}\,(\zeta-\omega)],$$

vnde valor ipſius Q ex factore $1-2v\,\text{coſ.}\,\omega+vv$ oriundus erit:

$$Q=-\tfrac{1}{n}\int\frac{\partial v\,[v\,\text{ſin.}\,\zeta-\text{ſin.}\,(\zeta-\omega)]+v\,\partial\Phi\,[v\,\text{coſ.}\,\zeta-\text{coſ.}\,(\zeta-\omega)]}{1-2v\,\text{coſ.}\,\omega+vv}.$$

§. 27. Quoniam haec ſolutio tam egregie cum praecedente conuenit, id profecto caſui fortuito tribui nequit; quam ob rem mihi quidem haec ſolutio prorſus ſingularis haud parum in receſſu habere videtur, vnde eam Geometris perſcrutandam proponere non dubito, vt eius ſoliditatem ex firmis principiis deriuare conentur.

DE

Digitized by Google

DE PROIECTIONE SPHAEROIDIS ELLIPTICAE GEOGRAPHICA.

Diſſertatio Tertia.

PROIECTIO PARVAE SVPERFICIEI TELLVRIS.

Auctore

F. T. SCHVBERT.

Conuent. exhib. d. 13 *Aug.* 1789.

§. 1.

Inter proiectiones, qvae ſenſu ſtricto ſic appellari poſſunt, ad uſum geographicum nulla magis adaptata eſt proiectione ſtereographica, de qva in *Diſſertatione prima* et *ſecunda* egimus, neqve ulla alia datur delineandi methodus, qvae in exhibendo integro hemiſphaerio commodius poſſet in uſum vocari. Figurarum enim ſimilitudo et conſtans diſtantiarum menſura minus qvam in ceteris proiectionibus hic perturbatur. Sin autem a ſtricto vocis *proiectionis* ſignificatu paululum recedere liceat, plures aliae dantur methodi mappas conſtruendi, qvibus ſinguli fines Geographiae multo accuratius impetrari poſſunt. Qvos qvidem inter fines duo primarii ſunt, diſtantiarum arearumqve una conſtans menſura, qvi cum tertio, figurarum ſcilicet in

tellure et mappa ſimilitudine, commode poſſunt coniungi. Optime triplici huic fini ſatisfieri poteſt, ſi pars telluris proiicienda tam exigua eſt, ut tanqvam planum vel ſaltem planum incurvatum eam conſiderare liceat. Eiusmodi proiectiones in praxi maximum habere uſum conſtat, unde de iis qvaedam adhuc diſſerere conſtituimus, initiumqve faciemus a caſu ultimo.

§. 2. In tota hacce materia omnia eo redeunt, ut iuſta determinetur ratio, qvae in tellure elliptica inter gradus longitudinis ac latitudinis deprehenditur, eademqve in proiectione qvantum fieri poſſit conſervetur. Gradus qvidem longitudinis ſine ambagibus inveniri poſſunt, ſiqvidem ſunt in ratione radiorum Parallelorum, qvi in tabula noſtra partibus radii Aeqvatoris expreſſi continentur ſub littera y. Qvoad gradus au-
Tab. I. tem latitudinis, vulgo ſolet (Fig. 3.) arcus Meridiani B M vel P M ad qvemcunqve latitudinis gradum per integrationem qvaeri, unde ſimplice ſubtractione habentur ſinguli latitudinis gradus. Qvem in finem coordinatae x et y cuicunqve ipſius β valori reſpondentes antea ſunt determinandae, qvae qvidem methodus non videtur breviſſima. Nonnunqvam ſeqvens adhiberi poſſet methodus, cuius perfectam cum priore concordantiam plurima me docuerunt tentamina. Sit (Fig. 3.)

$$\mathrm{N}n = \mu\nu = \partial x, \quad \mathrm{M}\mu = \partial y,$$

eritqve

$$\mathrm{M}\nu = \partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)},$$

poſito ſcilicet arcu B M $= s$. Eſt autem T M horizon loci M, linea M N Aeqvatori parallela, proinde T M N $= 90^\circ - \beta$, unde ſeqvitur $\partial s = \frac{\partial x}{\cos\beta} = -\frac{\partial y}{\sin\beta}$. Si iam elementis ∂x, ∂y, ∂s, valorem qvidem parvum attamen finitum tribuamus, facile patet, fore $\frac{\partial y}{\sin\beta} > \partial s$, et $\frac{\partial x}{\cos\beta} < \partial s$; ac ſi valor elementorum aſſumtus fuerit ſatis parvus, utramqve differentiam, nem-

pe

pe $\frac{\partial y}{\sin\beta} - \partial s$ et $\partial s - \frac{\partial x}{\cos\beta}$, ſore aeqvalem: qvare ſi e. gr. ∂s ſit arcus unius gradus, vel adhuc minor, eius loco tuto ſumi poſſe medium arithmeticum inter $\frac{\partial x}{\cos\beta}$ et $\frac{\partial y}{\sin\beta}$. Haecce methodus non uſu carere videtur, ubi non integer arcus BM, ſed immediate certi qvidam latitudinis gradus deſiderantur. Cum itaqve ſit (Diſſ. I. §. 3.) in partibus radii a,

$$y = \frac{m}{\sqrt{(m^2 + \tan g^2\beta)}}, \text{ et } x = \frac{\tan g\,\beta}{m\sqrt{(m^2 + \tan g^2\beta)}}$$

$$= \frac{1}{m\sqrt{(1 + m^2 \cot^2\beta)}}, \text{ vel } x = \frac{y\tan g\,\beta}{m\,m};$$

ponatur

$$y' = \frac{m}{\sqrt{[m^2 + \tan g^2(\beta + 1^\circ)]}}, \text{ et } x' = \frac{1}{m\sqrt{[1 + m^2\cot^2(\beta + 1^\circ)]}},$$

tumqve poſito $\partial y = y - y'$, et $\partial x = x' - x$, invenietur arcus unius gradus latitudinis ſub latitudine β, ſi capiatur medium arithmeticum inter $\frac{y - y'}{\sin\beta}$ et $\frac{x' - x}{\cos\beta}$. Veluti poſito $\beta = 45^\circ$, ſit

$$\sqrt{(m^2 + \tan g^2\beta)} = 1,417305,$$

proinde

$$y = 0,708645, \text{ et } x = 0,702496.$$

Eſt porro

$$\sqrt{(m^2 + \tan g^2 46^\circ)} = 1,4425934;$$

ideoqve

$$y' = 0,696223, \quad x' = 0,714904;$$

$$\frac{\partial y}{\sin\beta} = 0,01756736\ldots; \quad \frac{\partial x}{\cos\beta} = 0,01726472\ldots;$$

et medium arithmeticum $= 0,01741604\ldots$; qvod parum differt a valore, qvi in tabulae columna p reperitur $= 0,017417$. Licet haec methodus in caſibus ſpecialibus commodo non careat, tamen in tabulis computandis nimis eſt prolixa, etiamſi per evolutionem qvantitatis radicalis, ſi poteſtates ipſius $(m^2 - 1)$ altiores negligantur, longe ſimplicior reddatur. Qvod ſi concedatur, alia ſeſe mihi obtulit methodus, qvae integrando arcum

cum s per ſolam latitudinem β expreſſum praebet, qvam, ob eius ſimplicitatem, in uſu geographico, ubi non ſumma opus eſt exactitudine, merito iudico anteferendam.

§. 3. Si nempe ſupra reperta expreſſio ipſius y differentietur, erit

$$\partial y = \frac{-m \operatorname{tang} \beta \, \partial \beta}{\operatorname{cof}^2 \beta \sqrt{(m^2 + \operatorname{tang}^2 \beta)^3}},$$

ideoqve

$$\partial s = \frac{-\partial y}{\operatorname{fin} \beta} = \frac{m \partial \beta}{\operatorname{cof}^3 \beta \sqrt{(m^2 + \operatorname{tang}^2 \beta)^3}} = \frac{m \partial \beta}{\sqrt{(m^2 \operatorname{cof}^2 \beta + \operatorname{fin}^2 \beta)^3}}$$

$$= \frac{m \partial \beta}{[1 + (m^2 - 1) \operatorname{cof}^2 \beta]^{\frac{3}{2}}} = \frac{m \partial \beta}{1 + \frac{3}{2}(m^2 - 1) \operatorname{cof}^2 \beta},$$

neglectis nempe poteſtatibus ipſius $(m^2 - 1)$ altioribus. Qvo nunc haec expreſſio integrationem admittat, tribuatur eidem haec forma:

$$\partial s = \frac{m \partial \beta}{1 + \frac{3}{2}(m^2 - 1) - \frac{3}{2}(m^2 - 1) \operatorname{fin}^2 \beta},$$

et breuitatis cauſa ponatur

$$1 + \tfrac{3}{2}(m^2 - 1) = \delta\delta, \; \tfrac{3}{2}(m^2 - 1) = \varepsilon\varepsilon,$$

ut fiat

$$\partial s = \frac{m \partial \beta}{\delta\delta - \varepsilon\varepsilon \operatorname{fin}^2 \beta}, \text{ et}$$

$$s = m \int \frac{\partial \beta}{(\delta + \varepsilon \operatorname{fin} \beta)(\delta - \varepsilon \operatorname{fin} \beta)} = \frac{m}{2\delta} \left(\int \frac{\partial \beta}{\delta + \varepsilon \operatorname{fin} \beta} + \int \frac{\partial \beta}{\delta - \varepsilon \operatorname{fin} \beta} \right).$$

Statuatur

$$\frac{\partial \beta}{\delta + \varepsilon \operatorname{fin} \beta} = \partial v, \text{ et } \frac{\partial \beta}{\delta - \varepsilon \operatorname{fin} \beta} = \partial u, \text{ ut fit } s = \frac{m(v+u)}{2\delta}.$$

Poſito iam

$$\operatorname{fin} \beta = \frac{1 - tt}{1 + tt}, \text{ ut fit } \operatorname{cof} \beta = \frac{2t}{1 + tt},$$

$$\partial \beta = \frac{-2\partial t}{1 + tt}, \; \partial v = \frac{-2\partial t}{\delta + \varepsilon + (\delta - \varepsilon)tt}, \text{ et } \partial u = \frac{-2\partial t}{\delta - \varepsilon + (\delta + \varepsilon)tt},$$

fiet

fiet integrando, ob $\delta > \varepsilon$,

$$v = \frac{2}{\sqrt{(\delta\delta - \varepsilon\varepsilon)}} \text{ Arc. cot. } t \sqrt{\frac{\delta - \varepsilon}{\delta + \varepsilon}}.$$

Eſt autem $\delta\delta - \varepsilon\varepsilon = 1$, et

$$t = \sqrt{\frac{1 - \sin\beta}{1 + \sin\beta}} = \frac{\cos\beta}{1 + \sin\beta},$$

unde habemus

$$v = 2 \text{ Arc. cot. } \frac{(\delta - \varepsilon)\cos\beta}{1 + \sin\beta}.$$

Eodem prorſus modo reperitur

$$u = 2 \text{ Arc. cot. } \frac{(\delta + \varepsilon)\cos\beta}{1 + \sin\beta},$$

ideoqve

$$v + u = 2 \text{ Arc. cot. } \frac{-\sin\beta}{\delta\cos\beta} = -2 \text{ Arc. tang. } (\delta \cot\beta).$$

Hinc tandem habemus

$$s = -\frac{m}{\delta} \text{ Arc. tang. } (\delta \cot\beta) + \text{Conſt.}$$

Conſtans adiicienda dependet a puncto, ubi arcus s incipit. Qvodſi ab Aeqvatore incipiamus, formula noſtra caſu $\beta = 0$ evaneſcere debet, unde fit Conſtans $= + \frac{m}{\delta} 90^\circ$ vel $\frac{m}{2\delta}\pi$. Sin autem arcus a polo computetur, formula caſu $\beta = 90^\circ$ evaneſcere debet, unde ob $\cot\beta = 0$, etiam Conſtans $= 0$. Eſt itaqve arcus

$$PM = \frac{ma}{\sqrt{[1 + \frac{3}{2}(m^2 - 1)]}} \text{ Arc. tang. } [\cot\beta \sqrt{(1 + \tfrac{3}{2}(m^2 - 1))}].$$

Arcus autem

$$BM = \frac{ma}{\sqrt{[1 + \frac{3}{2}(m^2 - 1)]}} [\pi - \text{Arc. tang. } (\cot\beta \sqrt{(1 + \tfrac{3}{2}(m^2 - 1))})];$$

qvae autem expreſſio non vera eſt, niſi ellipſeos eccentricitas tam exigua ſit ac in caſu qvem hic contemplamur. Seqveretur e noſtra formula, integrum qvadrantem P B eſſe

$= \frac{m a \pi}{2 \sqrt{[1 + \frac{3}{2}(m^2 - 1)]}}$, ſeu eum eſſe ad qvadrantem circuli, cuius radius $= a$, in ratione $= m : \sqrt{\frac{3m^2 - 1}{2}}$, qvae itaqve proportio aſſumi poteſt, ſi ellipſis qvam minime a circulo differat. Ad mappas conſtruendas formula iſta ſatis accurata eſt:

$$PM = \frac{m}{\delta} \text{ Arc. tang. } (\delta \cot \beta),$$

in partibus radii a, ubi eſt $m = 1,0043668$; $\delta = 1,0065431$, et $\frac{m}{\delta} = 0,9978377$.

§. 4. Conſideremus iam parvam telluris partem, quae, ſi qvoqve ſecundum longitudinem parum extenderetur, ceu planum ſpectari poſſet, ſin autem integram zonam exiguae latitudinis continere debeat, optime conſiderari poterit ceu ſuperficies conica, qvae deinde in planum evoluta noſtram dabit proiectionem, ſicqve cum figurarum ſimilitudo, tum verae locorum diſtantiae propemodum retineantur. Sit itaqve (Fig. 4.) pars proiicienda A B *b a*, inter Meridianos A *a*, B *b*, et Parallelos A B, *a b*, comprehenſa. Parallelus per medium provinciae tranſiens ſit $\alpha\beta$, cuius latitudo $= \beta$. Redeamus nunc ad Fig. 3. ubi ſupponitur punctum M in Parallelo noſtro $\alpha\beta$, adeoqve provincia proiicienda conſideratur ut ſuperficies coni, cuius vertex in concurſu T tangentis cum axe. Eſt autem $MT = \frac{NT}{\text{coſ} MTN}$, $NT = \frac{y \partial x}{\partial y} = \frac{yy}{m\sqrt{(aa - yy)}}$, et $MTN = \beta$, conſeqventer $MT = \frac{yy \text{ſec} \beta}{m\sqrt{(aa - yy)}}$, ubi ſi ſubſtituatur

$$yy = \frac{m^2 a^2}{m^2 + \text{tang}^2 \beta}, \text{ fiet } MT = \frac{m a \text{ coſe } \beta}{\sqrt{(m^2 + \text{tang}^2 \beta)}}.$$

Iſtae tangentes vel lineae M T in tabula ſeqvente reperiuntur
Fig. 4. ſub litera *t*. Radio itaqve T M modo reperto deſcribatur circulus $\alpha\beta$, qvi repraeſentat Parallelum medium regionis proiiciendae. Nunc praeprimis gradus latitudinis ſunt determinandi. Si nempe in mappa uni gradui Aeqvatoris vel qvinde-

decim milliaribus geographicis tribuere velimus qvantitatem $=\gamma$, et arcus circuli radio ſuo aeqvalis contineat ν gradus, ut ſit $\nu = 57{,}2958\ldots$, erit radius Aeqvatoris in mappa $= a = \nu\gamma$, atqve fieri oportet $MT = \frac{m\nu\gamma}{\sin\beta \sqrt{(m^2 + \tan g^2\beta)}}$. Iam in tabula qvaeratur qvantitas unius gradus latitudinis ſub latitudine β et $\beta - 1°$, ubi qvidem numeri in tabula reperti per $a = \nu\gamma$ multiplicandi ſunt, tumqve fiat MN priori et Mn poſteriori aeqvalis, atqve per puncta N, n, e centro T deſcribantur circuli; eodemqve modo ceteri Paralleli determinantur.

Ad Meridianos qvod attinet, qvaeratur in tabula unus gradus longitudinis ſub latitudine β, cui in $\nu\gamma$ ducto aequalis fiat $Mm = m\mu$, etc. atqve ducantur Meridiani Tm, Tμ, etc. Cum gradus Parallelorum ſint in ratione radiorum, radius autem Paralleli $\alpha\beta$ in Sphaeroide ſit

$$= y = \frac{ma}{\sqrt{(m^2 + \tan g^2\beta)}}, \text{ fiet } Mm = \frac{y}{\nu} = \frac{m\gamma}{\sqrt{(m^2 + \tan g^2\beta)}}.$$

Hinc ſeqvitur, angulum MTm eſſe $= \frac{Mm}{MT} = \frac{\sin.\beta}{\nu}$ in partibus radii, ſive in gradibus $MTm = \sin\beta$; unde perſpicitur, angulos ad centrum T ſemper in ratione ſinuum minores eſſe iis, qvi per iſtos repraeſentantur. E. gr. poſito $\beta = 30°$, angulus, qvi unum gradum longitudinis repraeſentat, fit $MTm = 30'$.

Ceterum patet, arcus Nν ceterorumqve Parallelorum non exacte fore eiusdem qvantitatis ac in Sphaeroide; quae vero differentia haud ſenſibilis erit, modo mappa ſecundum latitudinem parum extendatur, cum Parallelo medio iuſta tributa ſit qvantitas.

Proiectio aream Sphaeroidis accurate exprimens.

§. 5. Sit (Fig. 5.) APC qvadrans Sphaeroidis, AC Aeqvator, PB Meridianus per punctum qvodcunqve M, cuius

latitudo $= \beta$, tranſiens, et P D Meridianus priori infinite propinqvus. Per punctum M ponatur Parallelus M N et $m n$ ei proximus, eritqve rectangulum M n elementum areae Sphaeroidis $=$ M N. M m. Eſt autem M N elementum circuli, cuius radius $y = \frac{m a}{\sqrt{(m^2 + tang^2 \beta)}}$, et M m elementum ellipſeos P B ſub latitudine β. Qvapropter ſi longitudo puncti M appelletur γ, erit B D $= a \partial \gamma$,

$$M N = \frac{m a \partial \gamma}{\sqrt{(m^2 + tang^2 \beta)}}, \text{ et } M m = \frac{m a \partial \beta}{cos^3 \beta \sqrt{(m^2 + tang^2 \beta)^3}} \text{ (§. 3.), ſeu}$$

$$M N = \frac{m a \cos \beta \partial \gamma}{\sqrt{(m^2 cos^2 \beta + sin^2 \beta)}}, \text{ et } M m = \frac{m a \partial \beta}{(m^2 cos^2 \beta + sin^2 \beta)^{\frac{3}{2}}};$$

unde habetur elementum areae

$$M n = \frac{m^2 a^2 \cos \beta \partial \beta \partial \gamma}{(m^2 cos^2 \beta + sin^2 \beta)^2} = \frac{m^2 a^2 \cos \beta \partial \beta \partial \gamma}{[m^2 - (m^2 - 1) sin^2 \beta]^2},$$

ac ſi ponatur $m^2 - 1 = n^2$, erit

$$M n = \frac{m^2 a^2 \cos \beta \partial \beta \partial \gamma}{(m + n \sin \beta)^2 (m - n \sin \beta)^2}$$

$$= \frac{a^2 \cos \beta \partial \beta \partial \gamma}{4} \left[\frac{1}{(m + n \sin \beta)^2} + \frac{1}{(m - n \sin \beta)^2} + \frac{1}{m(m + n \sin \beta)} + \frac{1}{m(m - n \sin \beta)}\right].$$

Qvo nunc area proiectionis idem habeat differentiale, patet *primo*, longitudinem non eſſe oportere functionem latitudinis, qvoniam alioqvin elementum longitudinis ſeu Paralleli contineret $\partial \beta$ et $\partial \gamma$, ideoqve elementum areae formam $\partial \beta^2 + \partial \beta \partial \gamma$. Hinc ſeqvitur, longitudinem in proiectione eſſe debere $= A \gamma$, denotante A qvantitatem qvamcunqve conſtantem. Poinde omnes gradus longitudinis ſub qvavis latitudine fiunt aeqvales, unde Paralleli non poſſunt non eſſe rectae parallelae, ac Meridiani rectae iis normales aut ſaltem inter ſe parallelae; ceu videre eſt in Fig. 6. *Secundo* latitudines ita capi debent, ut earum differentiale ſit proportionale elemento $\frac{M n}{\partial \gamma}$. Eſt enim (Fig. 6.) $M' N' = A \partial \gamma$, et $M' m' = \frac{M' n'}{M' N'}$, unde, qvia ex hypotheſi eſſe oportet $M' n' = C. M n$ (Fig. 5.), ubi eſt C conſtans arbitraria, neceſſe eſt ut ſit $M' m' = \frac{C}{A} . \frac{M n}{\partial \gamma}$.

Cui

Cui fini ſatisfieret, ſi integratione tantum *particulari* valor inveniretur aeqvationi iſti differentiali ſatisfaciens. At cum integratio *completa* hic nullam moveat difficultatem, hanc tantummodo evolvamus.

§. 6. Integrando nempe fit (§. 5.)

$$\int \frac{\mathrm{M}n}{\partial\gamma} = \frac{aa}{4}\left[\frac{-1}{n(m+n\sin\beta)} + \frac{1}{n(m-n\sin\beta)} + \frac{1}{mn}\log.(m+n\sin\beta) - \frac{1}{mn}\log.(m-n\sin\beta)\right]$$

$$= \frac{aa}{2}\left(\frac{\sin\beta}{m^2-n^2\sin^2\beta} + \frac{1}{mn}\log.\sqrt{\frac{m+n\sin\beta}{m-n\sin\beta}}\right).$$

Huic itaqve qvantitati parentheſi incluſae latitudines fieri debent proportionales. Ceterum cum iam ſatis obviae ſint tabulae logarithmorum *naturalium*, non opus eſt, logarithmos naturales formulae noſtrae in logarithmos *Briggianos* convertere. Si tamen logarithmos vulgares introducere velimus, qvia

$$\log.\ \text{nat.}\ z = (2{,}302585\ldots) \times \log.\ \text{brigg.}\ z, \text{ et}$$

$$mn = 0{,}0939638222\ldots;$$

latitudo B′ M′ in proiectione ſic exprimi poteſt: Fig. 6.

$$\mathrm{B'M'} = \mathrm{C}\left[\frac{\sin\beta}{m^2-n^2\sin^2\beta} + (12{,}2525085) \times \log.\ \text{brigg.} \frac{m+n\sin\beta}{m-n\sin\beta}\right],$$

ubi eſt

$$m = 1{,}0043668\ldots;\quad n = 0{,}0935553\ldots;$$

$$m^2 = 1{,}00875269\ldots;\ n^2 = 0{,}00875269\ldots;$$

et C conſtans ab arbitrio noſtro pendens, qvae itaqve ſic poterit determinari, ut figurae delineatae cum ſuperficie telluris ſimilitudo, qvantum fieri poſſit, conſervetur.

§. 7. Si nempe puncta mappae extrema qvoad longitudinem ſint A′, B′, qvoad latitudinem autem B′, M′, et A′ B′ $= \gamma^\circ$, latitudo puncti B′ $= \beta$, puncti M′ $= \lambda$; in tabula qvaeratur arcus Meridiani a latitudine β ad latitudinem λ ſeſe extendens, et arcus Paralleli γ graduum ſub latitudine μ, ſi

$\mu =$

$\mu = \frac{\beta + \lambda}{2}$. Prior ſit repertus $= p - q$, alter $= \eta\gamma$; atqve ex noſtra formula (§. 6.) latitudines punctorum M′ et B′ in proiectione repertae ſint C. δ et C. ε. Qvibus praeſuppoſitis; cum ſit $A'B' = A.\gamma$ (§. 5.), fiat $p - q : \eta\gamma = C(\delta - \varepsilon) : A.\gamma$, unde habetur $\frac{C}{A} = \frac{p - q}{\eta(\delta - \varepsilon)}$; in qva aeqvatione eſt η numerus tabulae exprimens unum gradum longitudinis ſub latitudine $= \frac{\beta + \lambda}{2}$; $\delta - \varepsilon$ invenitur, ſi in formula noſtra integrali (§. 6.) loco β ſubſtituantur ſucceſſive β et λ, atqve prior valor a poſteriore ſubtrahatur; $p - q$ habetur, ſi in tabula qvaeratur arcus Meridiani inter Aeqvatorem vel Polum et latitudinem β, et deinde inter idem punctum et latitudinem λ interceptus, tum vero a maiore ſubtrahatur minor. Praeterea patet, hic tantum qvaeri rationem $\frac{C}{A}$, qvoniam A eſt unitas aſſumta in proiectione (§. 5.), aeqvalis uni gradui Aeqvatoris ſeu qvindecim milliaribus geographicis. Area deniqve mappae poſtea per C eſt dividenda, qvo reſultet area telluris per iſtam repraeſentata.

Si figura telluris ſtatuatur ſphaerica, in aeqvatione integrali ſit $m = 1, n = 0$, proinde formula noſtra dat: BM = C.ſin.β.

§. 8. Conſtans menſura, qva locorum *diſtantiae* per totam mappae extenſionem poſſent menſurari, res eſt maximi in uſu geographico momenti. Hypotheſi ſphaericae telluris figurae aſſumta, huic fini omnium maxime ſatisfacere proiectionem *Delislianam*, conſtat; neqve pro hypotheſi elliptica melior poterit excogitari. Unde, qvomodo ea ad figuram ellipticam ſit applicanda, paucis adhuc verbis exponamus. Sit itaqve (Fig. 4.) T*n* Meridianus per medium mappae tranſiens, qvo in ſuos gradus ope tabulae diviſo prorſus ut ſupra, omnia determinata erunt puncta, per qvae Paralleli tranſeunt, qvi nempe ſunt circuli concentrici circa centrum T, in qvo omnes

nes Meridiani ceu lineae rectae ſe interſecant; qvod itaqve punctum praeprimis eſt determinandum. Qvem in finem bini aſſumantur Paralleli N B et $n\,b$, a medio et extremis mappae aeqve diſtantes, hisqve eadem ad Meridianos tribuatur ratio, qvae in Sphaeroide elliptica obtinet. Qvare eſſe debet $N\nu$ normalis ad Meridianum T n, et qvidem aeqvalis uni gradui longitudinis ſub latitudine λ, $n\,r$ autem aeqvalis uni gradui longitudinis ſub latitudine β, ſi nempe λ et β ſint latitudines Parallelorum N B et $n\,b$. Repertus itaqve ſit in tabula arcus Meridiani ab Aeqvatore usqve ad latitudinem $\lambda = p$, ad latitudinem β autem $= q$, unus gradus longitudinis ſub latitudine $\lambda = \varepsilon$, ſub latitudine $\beta = \delta$, et qvantitas uni gradui Aeqvatoris in mappa tributa $= \gamma$; atqve poſito $\nu = 57,2957795\ldots$, eſſe oportet

$$N\,n = (p - q)\,\nu\,\gamma,\ n\,r = \delta\,\nu\,\gamma,\ N\,\nu = \varepsilon\,\nu\,\gamma.$$

Unde habemus

$$T\,n : T\,N = n\,r : N\,\nu,\ \text{et}\ T\,n - T\,N : TN = n\,r - N\,\nu : N\,\nu,$$

ideoqve

$$T\,N = \frac{N\,\nu . N\,n}{n\,r - N\,\nu} = \frac{\varepsilon\,\nu\,\gamma\,(p - q)}{\delta - \varepsilon},$$

et angulus

$$N\,T\,\nu = \frac{N\,\nu}{TN} = \frac{n\,r - N\,\nu}{N\,n} = \frac{\delta - \varepsilon}{p - q}.$$

Ad mappam totius imperii Ruſſici conſtruendam ſtatui poteſt $\beta = 55°$, $\lambda = 65°$, unde tabula praebet

$$p = 1,129499;\quad q = 0,954780;$$
$$\delta = 0,0100402;\ \varepsilon = 0,00740253;$$
$$p - q = 0,174719;\ \delta - \varepsilon = 0,00263767.$$

Hinc invenitur angulus N T ν, qvi uni gradui longitudinis reſpondet,

$$= 0,0150967 = 51'54'',\ \text{et}\ T\,N = 28,09442.\,\gamma.$$

Diſtan-

Diſtantia Poli a puncto N eſt $= 25,09555 \cdot \gamma$, qvemadmodum in tabula videre licet; unde commune Parallelorum centrum ſitum eſt $3 \cdot \gamma$ vel circiter 3° ultra Polum. Hinc facilis deducitur mappam conſtruendi methodus, dato puncto T, et angulo N T ν.

In proiectione ſphaerica iisdem aſſumtis elementis, inveniretur

$$T\,N = \frac{10 \cos\lambda}{\cos\beta - \cos\lambda} \cdot \gamma = 27,995 \cdot \gamma;$$

ideoqve differentia $= 0,099 \cdot \gamma$, vel $\frac{1}{10}\gamma$. Angulus autem

$$N\,T\,\nu = \frac{\cos\beta - \cos\lambda}{10} = 0,01509581 = 51'53''44''',$$

proinde differentia prorſus inſenſibilis $= 16'''$.

§. 9. Nonnulla adhuc mihi dicenda ſunt de tabula annexa: qvae qvo clarius intelligantur, recurrendum erit ad Fig. 3. Tabula continet ſeptendecim columnas, qvibus literae ſuperſcriptae idem denotant ac in ipſa Diſſertatione. Ad ſingulos latitudinis gradus, qvos columna prima (β) refert, reperiuntur in columna ſecunda (β') angulus B C M, in tertia (x), qvarta (y), qvinta (z) et ſexta (t) lineae C N, N M, C M et M T; in ſeptima (η) gradus longitudinis, in octava (p) gradus latitudinis, et in nona (s) arcus Meridiani ab Aeqvatore ad Parallelum latitudinis β. Omnes hae lineae in partibus radii Aeqvatoris $a = 1$ exprimuntur, ſecundum rationem axium theoriae Newtonianae, ubi nempe $m = \frac{230}{229}$. Cum vero plures Aſtronomi ſeqvantur rationem, qvam in calculo ſuo adhibuit *de la Caille*, h. e. $m = \frac{200}{199}$; non inutile duxi, eadem elementa ex hac qvoqve hypotheſi computare. Reperiuntur ea in columnis, qvae ſeqvuntur a decima usqve ad decimam ſeptimam. In his enim ſub titulo *correctionis* continetur differentia, qva numeri priorum columnarum augendi aut minuendi

Digitized by Google

endi ſunt (qvod ſigna $\pm$ columnae ſuperſcripta indicant), qvo numeri rationis 230 : 229 reducantur ad numeros rationi 200 : 199 reſpondentes. Totius fere calculi fundamentum mihi fuit radius Paralleli y. Formulis ſcilicet in tabula hacce computanda uſus ſum ſeqventibus perqvam ſimplicibus, qvarum veritas cuivis figuram 1mam intuenti facile patebit:

$$\tang \beta' = \frac{\tang \beta}{m\,m};\; y = \frac{m}{\sqrt{(m^2 + \tang^2 \beta)}};\; x = \frac{y \tang \beta}{m\,m} = y \tang \beta' \ldots,$$

$$z = \frac{y}{\cos \beta'};\; t = \frac{y}{\sin \beta};\; \eta = 0{,}017453 \cdot y.$$

Arcum s ſecundum formulam *Lamberti* computavi:

$$\frac{s}{\cos \lambda} = \omega \left(1 - \frac{1}{4 \cdot 4} \tang^4 \lambda - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8} \tang^8 \lambda - \text{cet.}\right)$$
$$+ \sin 2\,\omega \left(\frac{1 \cdot 3}{4} \tang^2 \lambda + \frac{1 \cdot 3 \cdot 3}{4 \cdot 4 \cdot 8} \tang^6 \lambda + \text{cet.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{2} \sin 4\,\omega \left(\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 8} \tang^4 \lambda + \frac{3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 12} \tang^8 \lambda + \text{cet.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{3} \sin 6\,\omega \left(\frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 8 \cdot 12} \tang^6 \lambda + \text{cet.}\right) + \text{etc.}$$

in qva eſt $\omega = 90° - \beta$, et angulus λ reperitur per aeqvationem: $\sin^2 \lambda = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)$, qvi angulus cum admodum parvus inveniatur (circiter 4°), termini valde convergunt. Elementum p ex arcu s ope ſimplicis ſubtractionis invenitur.

OBSERVATIONES VARIAE CIRCA INTEGRATIONEM AEQVATIONVM HOMOGENEARVM RATIONALIVM SINE VARIABILIVM SEPARATIONE PERFICIENDAM.

Auctore

NICOLAO FVSS.

Conuent. exhib. die 11 Febr. 1790.

§. 1.

Peruoluenti nuper Tomum primum veterum noſtrae Academiae Commentariorum pro Anno 1726, in oculos mihi incidebat Diſſertatio celeberrimi Iohannis Bernoulli, inſcripta: *De integrationibus aequationum differentialium, vbi traditur methodi alicuius ſpecimen integrandi ſine praeuia ſeparatione Indeterminatarum.* Suſpicata affinitate argumenti cum quodam alio, in quo tum temporis occupatus eram, permotus hanc Diſſertationem auide, nec ſine fructu, licet ſpei irritus, perlegi.

§. 2. Methodus enim, de qua in hac commentatione ſermo eſt, tantum ſpectat ad aequationes homogeneas rationales, cuiuscunque ordinis, veluti:

I.

Digitized by Google

I. $(ax+by)\partial x+(cx+dy)\partial y=0,$

II. $(ax^2+bxy+cy^2)\partial x+(dx^2+exy+fy^2)\partial y=0,$

III. $(ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3)\partial x+(ex^3+fx^2y+gxy^2+hy^3)\partial y=0,$

et ita porro, pro quarum integratione inſignis ille ſui temporis Geometra ſequentem regulam exhibet. Integrale, inquit, ſemper talem habebit formam:

$$(x+\alpha y)^\pi (x+\beta y)^\tau (x+\gamma y)^\rho (x+\delta y)^\Phi \text{ etc.} = C,$$

aſſumendo ſcilicet huiusmodi factorum binomialium duo pro aequatione homogenea primi ordinis, tres pro ea ſecundi ordinis, et ita porro. Vnde differentiando prodibit aequatio eiusdem ordinis et tot terminorum quot propoſita, adeo vt tot inſtitui poſſint comparationes inter vtriusque terminorum coëfficientes, quae determinabunt aſſumtos coëfficientes et exponentes, ipſamque adeo aequationem finitam quae deſideratur.

§. 3. Qui regulam hanc pro integratione aequationum homogenearum rationalium, loco citato ſine demonſtratione exhibitam, cum regula Euleriana comparare voluerit, is quidem, quomodo ambae inter ſe cohaereant haud difficulter intelliget; verum quomodo vna et altera harum regularum ex methodo generali, ab Illuſtri quondam Eulero in Calculo Integrali pro omni aequatione homogenea tradita, deriuari queat, non tam facile perſpicitur. Cum igitur inter legendum variae ſuper inſtituenda hac comparatione et faciliori regulae generalis applicatione ſubortae eſſent obſeruationes, non omnino inutile fore duxi, ſi eas hic breuiter expoſuero.

§. 4. Incipiam hunc in finem a principiis generalibus pro integratione huiusmodi aequationum ſtabilitis, quae, ne Lectori ea aliunde repetere opus ſit, ob oculos poſuiſſe

Digitized by Google

iuuabit. Sit igitur $P\partial x + Q\partial y = 0$ aequatio homogenea quaecunque, vbi ſcilicet litterae P et Q denotent functiones homogeneas n dimenſionum ipſarum x et y, atque conſtat, ſi haec aequatio diuidatur per $Px + Qy$, eam euadere per ſe integrabilem, hoc eſt, per ſe integrabilem fore aequationem $R\partial x + S\partial y = 0$, exiſtente $R = \frac{P}{Px+Qy}$ et $S = \frac{Q}{Px+Qy}$.

§. 5. Cognito autem hoc multiplicatore $\frac{1}{Px+Qy}$, ad ipſum aequationis homogeneae $P\partial x + Q\partial y = 0$ integrale inueniendum ſequentem Eulerus in Inſtitutionibus Calculi integralis Tomo I. pag. 338. regulam generaliſſimam dedit: „Integretur formula $\int \frac{P\partial x}{Px+Qy}$, ſpectando y vt conſtantem, ac „determinetur certa ratione, vt euaneſcat, verbi gratia, poſito „$x = f$. Tum, poſito breuitatis cauſſa $\frac{P}{Px+Qy} = R$, ſumatur valor $(\frac{\partial R}{\partial y})$, et eadem lege quaeratur integrale $\int \partial x (\frac{\partial R}{\partial y})$, „ſpectando iterum y vt conſtantem; tum erit $\frac{Q}{Px+Qy} - \int \partial x (\frac{\partial R}{\partial y})$ „functio ipſius y tantum, ſeu $\frac{Q}{Px+Qy} - \int \partial x (\frac{\partial R}{\partial y}) = Y$, at„que hinc erit integrale quaeſitum $\int \frac{P\partial x}{Px+Qy} + \int Y\partial y = C$.

§. 6. Videamus nunc quomodo huius regulae ope integratio actualis inſtitui, notaque regula pro aequationibus homogeneis rationalibus inde deriuari poſſit. Hunc in finem notetur diuiſorem $Px + Qy$ eſſe formam $n + 1$ dimenſionum, ita vt in totidem factores ſimplices binomiales reſolui et fractio $\frac{P\partial x}{Px+Qy}$ per partes integrari queat, ponendo

$$\frac{P}{Px+Qy} = R = \frac{\alpha}{x+\mathfrak{A}y} + \frac{\beta}{x+\mathfrak{B}y} + \frac{\gamma}{x+\mathfrak{C}y} + \text{etc.}$$

vnde igitur integrando, habita ſola quantitate x pro variabili, erit

$$\int \frac{P\partial x}{Px+Qy} = \alpha l(x+\mathfrak{A}y) + \beta l(x+\mathfrak{B}y) + \gamma l(x+\mathfrak{C}y) + \text{etc.} + C.$$

Hic autem, ſi ſecundam regulam ſupra expoſitam, integrale ita ca-

capiatur, vt euaneſcat poſito $x=f$, habebitur

$$\int\frac{P\partial x}{Px+Qy}=\alpha l\frac{x+\mathfrak{A}y}{f+\mathfrak{A}y}+\beta l\frac{x+\mathfrak{B}y}{f+\mathfrak{B}y}+\gamma l\frac{x+\mathfrak{C}y}{f+\mathfrak{C}y}+\text{etc.}$$

§. 7. Tum autem erit ex variabilitate ipſius y:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)=\frac{-\alpha\mathfrak{A}}{(x+\mathfrak{A}y)^2}-\frac{\beta\mathfrak{B}}{(x+\mathfrak{B}y)^2}-\frac{\gamma\mathfrak{C}}{(x+\mathfrak{C}y)^2}-\text{etc.}$$

$$\int\partial x\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)=\frac{\alpha\mathfrak{A}}{x+\mathfrak{A}y}+\frac{\beta\mathfrak{B}}{y+\mathfrak{B}y}+\frac{\gamma\mathfrak{C}}{x+\mathfrak{C}y}+\text{etc.}+D,$$

vbi ſi conſtans D ita determinetur, vt integrale euaneſcat poſito $x=f$, erit

$$\int\partial x\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)=\frac{\alpha\mathfrak{A}(f-x)}{(f+\mathfrak{A}y)(x+\mathfrak{A}y)}+\frac{\beta\mathfrak{B}(f-x)}{(f+\mathfrak{B}y)(x+\mathfrak{B}y)}+\text{etc.}$$

Hinc ſi ſtatuatur

$$\frac{Q}{Px+Qy}=\frac{\alpha'}{x+\mathfrak{A}y}+\frac{\beta'}{x+\mathfrak{B}y}+\frac{\gamma'}{x+\mathfrak{C}y}+\text{etc.}$$

erit functio illa ſolius y, littera Y indicata

$$Y=\frac{\alpha'(f+\mathfrak{A}y)-\alpha\mathfrak{A}(f-x)}{(f+\mathfrak{A}y)(x+\mathfrak{A}y)}+\frac{\beta'(f+\mathfrak{B}y)-\beta\mathfrak{B}(f-x)}{(f+\mathfrak{B}y)(x+\mathfrak{B}y)}+\text{etc.}$$

§. 8. Haec quidem expreſſio adhuc continet variabilem x, quae autem eliminabitur ſtatuendo $\alpha'=\alpha\mathfrak{A}$, $\beta'=\beta\mathfrak{B}$, $\gamma'=\gamma\mathfrak{C}$, et ita porro, quo facto Y ita exprimetur:

$$Y=\frac{\alpha\mathfrak{A}}{f+\mathfrak{A}y}+\frac{\beta\mathfrak{B}}{f+\mathfrak{B}y}+\frac{\gamma\mathfrak{C}}{f+\mathfrak{C}y}+\text{etc.}$$

vnde porro deducitur

$$\int Y\partial y=\alpha l(f+\mathfrak{A}y)+\beta l(f+\mathfrak{B}y)+\gamma l(f+\mathfrak{C}y)+\text{etc.}$$

Cum igitur vi regulae §. 5. expoſitae ſit

$$\int\frac{P\partial x}{Px+Qy}+\int Y\partial y=C,$$

integrale quaeſitum erit

$$\alpha l(x+\mathfrak{A}y)+\beta l(x+\mathfrak{B}y)+\gamma l(x+\mathfrak{C}y)+\text{etc.}$$

quod cum ſimul ſit integrale formulae $\int\frac{P\partial x}{Px+Qy}$, nulla conſtantis ratione habita, aſſeuerare certo poſſumus, integrale completum aequationis homogeneae rationalis $P\partial x+Q\partial y=0$ eſſe

$\int \frac{P \partial x}{P x + Q y}$, dum in integrando tantum variabilitatis ipſius x ratio tenetur.

§. 9. Idem autem multo facilius et euidentius ſequenti modo oſtendi poteſt. Conſideretur in genere aequatio per ſe integrabilis quaecunque $R \partial x + S \partial y = 0$, et cum ex natura huiusmodi aequationum ſit $\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)$, dabitur functio finita binarum variabilium x et y, quae differentiata praebeat $R \partial x + S \partial y$. Indicetur iſta functio littera V, et cum ſit $\partial V = R \partial x + S \partial y$, erit $R \partial x$ differentiale functionis V, ſumta ſola x pro variabili, et $S \partial y$ differentiale eiusdem V, ſi ſola y pro variabili habeatur. Erit igitur:

1°.) $V = \int R \partial x + Y$,

2°.) $V = \int S \partial y + X$,

vbi ſcilicet Y denotat functionem quamcunque ipſius y loco conſtantis introductam, et X eiusmodi functionem ipſius x, quas ergo functiones ſemper ita definire licebit, vt fiat

$$\int R \partial x + Y = \int S \partial y + X.$$

§. 10. Sufficiet ergo vnicum valorem examinaſſe: $V = \int R \partial x + Y$, vbi pro determinanda functione Y integrale $\int R \partial x$ littera Z deſignemus, ita ſcilicet ſumtum, vt ſola x pro variabili habeatur. Hinc igitur erit

$$V = Z + Y = \int S \partial y + X.$$

Differentietur iam haec aequatio, habita ſola y pro variabili, prodibitque haec aequatio:

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) + \frac{\partial Y}{\partial y} = S,$$

vnde functio Y determinabitur.

§. 11. Hisce generalioribus de integratione aequationum per ſe integrabilium, ſcopo noſtro inſeruientibus, praemiſſis,

miſſis, obſeruo pro aequationibus homogeneis noſtris rationalibus ſemper eſſe $\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = S$, ideoque $\frac{\partial Y}{\partial y} = 0$, quod ita oſtendo: Cum ſit

$$R = \frac{\alpha}{x + \mathfrak{A} y} + \frac{\beta}{x + \mathfrak{B} y} + \frac{\gamma}{x + \mathfrak{C} y} + \text{etc.}$$
$$S = \frac{\alpha'}{x + \mathfrak{A} y} + \frac{\beta'}{x + \mathfrak{B} y} + \frac{\gamma'}{x + \mathfrak{C} y} + \text{etc.}$$

exiſtente

$$\alpha' = \alpha \mathfrak{A},\ \beta' = \beta \mathfrak{B},\ \gamma' = \gamma \mathfrak{C},\ \text{etc.}$$

ob $Z = \int R \partial x$ habebimus

$$Z = \alpha l(x + \mathfrak{A} y) + \beta l(x + \mathfrak{B} y) + \gamma l(x + \mathfrak{C} y) + \text{etc.}$$

hincque differentiando

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = \frac{\alpha'}{x + \mathfrak{A} y} + \frac{\beta'}{x + \mathfrak{B} y} + \frac{\gamma'}{x + \mathfrak{C} y} + \text{etc.} = S.$$

§. 12. Cum igitur ſit $\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = S$, erit $\frac{\partial Y}{\partial y} = 0$, conſequenter Y quantitas conſtans, quam ponamus $Y = C$, ita vt habeamus $V = Z + C$. At vero ob $R \partial x + S \partial y = \partial V = 0$, erit etiam V quantitas conſtans, ideoque eſt $Z = D$. Manifeſtum igitur eſt integrale aequationis homogeneae rationalis $P \partial x + Q \partial y = 0$, et quidem completum, fore $\int \frac{P \partial x}{P x + Q y} = D$, integrali ita ſumto, vt tantum variabilitatis ipſius x ratio habeatur.

§. 13. Quod ſi igitur propoſita fuerit aequatio homogenea rationalis cuiuscunque ordinis, veluti ordinis n, ea vtique ſine praeuia Indeterminatarum ſeparatione ſequenti modo integrari poterit. Ponatur in aequatione propoſita $P \partial x + Q \partial y = 0$, x et y loco ∂x et ∂y, quo facto naſcitur forma $n + 1$ dimenſionum $P x + Q y$, per quam ſi primus aequationis terminus, differentiali ∂x affectus, diuidatur et fractio $\frac{P \partial x}{P x + Q y}$ per partes integretur, habita tantum variabilitatis ipſius x ratione, prodibit integrale completum aequationis propoſitae.

§. 14.

Digitized by Google

§. 14. Cum igitur inuenerimus

$$\int \frac{P\partial x}{Px+Qy} = \alpha l(x+\mathfrak{A}y)+\beta l(x+\mathfrak{B}y)+\gamma l(x+\mathfrak{C}y)+ \text{etc.}$$

ob $\int \frac{P\partial x}{Px+Qy} = \mathfrak{D}$ (§. 12.) habebimus

$$\alpha l(x+\mathfrak{A}y)+\beta l(x+\mathfrak{B}y)+\gamma l(x+\mathfrak{C}y)+\text{etc.} = l\Delta$$

ita vt, ſi ad numeros regrediamur, ſequens prodeat aequatio integralis completa:

$$(x+\mathfrak{A}y)^\alpha (x+\mathfrak{B}y)^\beta (x+\mathfrak{C}y)^\gamma \text{ etc.} = \Delta.$$

Ex huius enim aequationis differentiatione naſcitur aequatio differentialis propoſita $P\partial x + Q\partial y = 0$. Quod coëfficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc., vt et exponentes α, β, γ, etc. attinet, eos quouis caſu oblato, conceſſa ſcilicet aequationum algebraicarum reſolutione, determinare licebit.

§. 15. Aequatio integralis hoc modo inuenta ea ipſa eſt, quam Ill. Bernoulli aſſumſerat, quamque quia nulla demonſtratione inſtruxit, a poſteriori, vt videtur, et quaſi diuinando adeptus eſt. Quomodo nunc tam exponentes quam coëfficientes facillime definiri queant, in ſequentibus fuſius explicabimus.

Integratio
aequationis homogeneae I^i. ordinis
$\partial x(ax+by)+\partial y(cx+dy)=0.$

§. 16. Secundum regulam igitur ſupra (§. 13.) expoſitam loco ∂x et ∂y ponendum eſt x et y, atque ob

$$P = ax+by \text{ et } Q = cx+dy$$

habebimus denominatorem

$$Px+Qy = axx+(b+c)xy+dyy,$$

ita vt fractio noſtra ſit

$$\frac{P\partial x}{Px+Qy} = \frac{(ax+by)\partial x}{axx+(b+c)xy+dyy}.$$

Quod

Quod ſi igitur ſtatuatur

$$\frac{x+\frac{b}{a}y}{xx+\frac{b\;\;c}{a}xy+\frac{d}{a}yy}=\frac{\alpha}{x+\mathfrak{A}y}+\frac{\beta}{x+\mathfrak{B}y},$$

ſtatim manifeſtum eſt fore

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{B}=\frac{b+c}{a},$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}=\frac{d}{a},$$

$$\alpha+\beta=1,$$

$$\alpha\mathfrak{B}+\beta\mathfrak{A}=\frac{b}{a},$$

vnde pro $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, α, β, ſequentes valores oriuntur:

$$\mathfrak{A}=\frac{b+c\pm\sqrt{[(b+c)^2-4ad]}}{2a},$$

$$\mathfrak{B}=\frac{b+c\mp\sqrt{[(b+c)^2-4ad]}}{2a},$$

$$\alpha=\frac{b-a\mathfrak{A}}{a(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})}=\frac{b-c\mp\sqrt{[(b+c)^2-4ad]}}{2\sqrt{[(b+c)^2-4ad]}},$$

$$\beta=\frac{a\mathfrak{B}-b}{a(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})}=\frac{c-b\mp\sqrt{[(b+c)^2-4ad]}}{2\sqrt{[(b+c)^2-4ad]}}.$$

His ita determinatis aequatio integralis, ex cuius differentiatione propoſita aequatio homogenea

$$\partial x(ax+by)+\partial y(cx+dy)=0,$$

naſcitur, ita ſe habebit:

$$(x+\mathfrak{A}y)^{\alpha}\times(x+\mathfrak{B}y)^{\beta}=\Delta.$$

§. 17. Ad hoc oſtendendum ſumantur huius aequationis logarithmi, eritque

$$\alpha\, l(x+\mathfrak{A}y)+\beta\, l(x+\mathfrak{B}y)=l\Delta,$$

atque ſumtis differentialibus prodit

$$\frac{\alpha(\partial x+\mathfrak{A}\partial y)}{x+\mathfrak{A}y}+\frac{\beta(\partial x+\mathfrak{B}\partial y)}{x+\mathfrak{B}y}=0.$$

Hinc autem, ſublatis denominatoribus, ſequens naſcitur aequatio differentialis:

Digitized by Google

$$\left\{\begin{array}{l}+\alpha x\partial x+\alpha\mathfrak{A}x\partial y+\alpha\mathfrak{B}y\partial x+\alpha\mathfrak{A}\mathfrak{B}y\partial y\\+\beta x\partial x+\beta\mathfrak{B}x\partial y+\beta\mathfrak{A}y\partial x+\beta\mathfrak{A}\mathfrak{B}y\partial y\end{array}\right\}=0$$

quae cum propoſita per a diuiſa

$$x\partial x+\frac{b}{a}y\partial x+\frac{c}{a}x\partial y+\frac{d}{a}y\partial y=0,$$

comparata praebet has determinationes:

I. $\alpha+\beta=1$,

II. $\alpha\mathfrak{B}+\beta\mathfrak{A}=\frac{b}{a}$,

III. $\alpha\mathfrak{A}+\beta\mathfrak{B}=\frac{c}{a}$,

IV. $(\alpha+\beta)\mathfrak{A}\mathfrak{B}=\frac{d}{a}$;

ex quibus pro α, β, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ iidem plane valores deducuntur, quos ſupra §. 16. inuenimus.

§. 18. Nunc quoque, ob numerum factorum denominatoris determinatum, facilius perſpicietur proprietas illa aequationum homogenearum rationalium ſupra §. 11. memorata, quod ſit $\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)=S$. Cum enim noſtro caſu fiat

$Z=\alpha l(x+\mathfrak{A}y)+\beta l(x+\mathfrak{B}y)$, erit

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)=\frac{\alpha\mathfrak{A}}{x+\mathfrak{A}y}+\frac{\beta\mathfrak{B}}{x+\mathfrak{B}y},$$

hoc eſt

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{(\alpha\mathfrak{A}+\beta\mathfrak{B})x+(\alpha+\beta)\mathfrak{A}\mathfrak{B}y}{xx+(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})xy+\mathfrak{A}\mathfrak{B}yy}.$$

At vero ſubſtitutis loco $\alpha\mathfrak{A}+\beta\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$, nec non $(\alpha+\beta)\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ valoribus modo ante inuentis, ſupra et infra per a multiplicando nanciſcimur:

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)=\frac{cx+dy}{axx+(b+c)xy+dyy}=S,$$

vt ſupra in genere inuenimus.

Inte-

Integratio

Aequationis homogeneae 2ⁱ. ordinis

$\partial x(axx+bxy+cyy)+\partial y(dxx+exy+fyy)=0.$

§. 19. Si hic loco ∂x et ∂y ſcribatur x et y, denominator aequationem ſponte integrabilem reddens erit

$$a x^3+(b+d)x^2 y+(c+e)x y^2+f y^3,$$

ita vt nunc habeamus

$$\frac{P\partial x}{Px+Qy}=\frac{axx+bxy+cyy}{ax^3+(b+d)x^2y+(c+e)xy^2+fy^3}.$$

Statuatur iam iſta fractio:

$$\frac{axx+bxy+cyy}{ax^3+(b+d)x^2y+(c+e)xy^2+fy^3}=\frac{\alpha}{x+\mathfrak{A}y}+R,$$

denotante R omnes reliquas fractiones partiales, vnde multiplicando per $x+\mathfrak{A}y$ habebimus

$$\frac{(axx+bxy+cyy)(x+\mathfrak{A}y)}{ax^3+(b+d)x^2y+(c+e)xy^2+fy^3}=\alpha+R(x+\mathfrak{A}y),$$

vnde poſito $x=-\mathfrak{A}y$, ex parte dextra ſola quantitas α remanet, e ſiniſtra vero parte tam numerator quam denominator euaneſcunt. Sumantur ergo differentialia more ſolito, et habita quantitate y pro conſtante prodit iſta fractio:

$$\frac{axx+bxy+cyy+(x+\mathfrak{A}y)(2ax+by)}{3axx+2(b+d)xy+(c+e)yy},$$

quae poſito $x=-\mathfrak{A}y$ praebet

$$\alpha=\frac{a\mathfrak{A}^2-b\mathfrak{A}+c}{3a\mathfrak{A}^2-2(b+d)\mathfrak{A}+(c+e)}.$$

Eodem modo porro reperitur quoque

$$\beta=\frac{a\mathfrak{B}^2-b\mathfrak{B}+c}{3a\mathfrak{B}^2-2(b+d)\mathfrak{B}+(c+e)},$$

$$\gamma=\frac{a\mathfrak{C}^2-b\mathfrak{C}+c}{3a\mathfrak{C}^2-2(b+d)\mathfrak{C}+(c+e)}.$$

Coëfficientes autem $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ex ſequentibus determinationibus deriuantur:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = \frac{b+d}{a},$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C} = \frac{c+e}{a},$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \frac{f}{a},$$

ex quibus conficitur iſta aequatio:

$$\mathfrak{A}^3 - \frac{b+d}{a}\mathfrak{A}^2 + \frac{c+e}{a}\mathfrak{A} - \frac{f}{a} = 0,$$

cuius ope ſi valor litterae $\mathfrak{A}$ rite fuerit determinatus, erit pro reliquis

$$\mathfrak{B} = \tfrac{1}{2}(m - \mathfrak{A}) \pm \surd\left[\tfrac{1}{4}(m - \mathfrak{A})^2 - \frac{n}{\mathfrak{A}}\right],$$

$$\mathfrak{C} = \tfrac{1}{2}(m - \mathfrak{A}) \mp \surd\left[\tfrac{1}{4}(m - \mathfrak{A})^2 - \frac{n}{\mathfrak{A}}\right],$$

exiſtente

$$m = \frac{b+d}{a} \text{ et } n = \frac{f}{a}.$$

Coëfficientibus autem et exponentibus hoc modo definitis, aequationis homogeneae rationalis propoſitae ſecundi ordinis aequatio integralis completa erit

$$(x + \mathfrak{A}y)^\alpha (x + \mathfrak{B}y)^\beta (x + \mathfrak{C}y)^\gamma = \Delta.$$

§. 20. Superfluum foret has integrationes vlterius proſequi: nemo enim non videt quomodo pro ſuperioribus ordinibus calculus inſtituendus ſit. Quoniam autem cardo rei potiſſimum in determinatione coëfficientium $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. nec non exponentium α, β, γ, etc. pro quolibet ordine aequationum canonicarum verſatur, formulas, quarum ſubſidio eos pro ordine tertio definire licet, appoſuiſſe hic iuuabit.

§. 21. Quod autem ad coëfficientes ſpectat, eorum omnium valores per ſolum primum $\mathfrak{A}$ determinabuntur, quippe qui ipſe ex hac aequatione biquadratica eruitur:

$$\mathfrak{A}^4 - \frac{b+e}{a}\mathfrak{A}^3 + \frac{c+f}{a}\mathfrak{A}^2 - \frac{d+g}{a}\mathfrak{A} + \frac{h}{a} = 0.$$

In-

Inuentis autem coëfficientibus, exponentes ſequenti modo determinabuntur:

$$\alpha = \frac{a\mathfrak{A}^3 - b\mathfrak{A}^2 + c\mathfrak{A} - d}{4a\mathfrak{A}^3 - 3(b+e)\mathfrak{A}^2 + 2(c+f)\mathfrak{A} - (d+g)},$$
$$\beta = \frac{a\mathfrak{B}^3 - b\mathfrak{B}^2 + c\mathfrak{B} - d}{4a\mathfrak{B}^3 - 3(b+e)\mathfrak{B}^2 + 2(c+f)\mathfrak{B} - (d+g)},$$
$$\gamma = \frac{a\mathfrak{C}^3 - b\mathfrak{C}^2 + c\mathfrak{C} - d}{4a\mathfrak{C}^3 - 3(b+e)\mathfrak{C}^2 + 2(c+f)\mathfrak{C} - (d+g)},$$
$$\delta = \frac{a\mathfrak{D}^3 - b\mathfrak{D}^2 + c\mathfrak{D} - d}{4a\mathfrak{D}^3 - 3(b+e)\mathfrak{D}^2 + 2(c+f)\mathfrak{D} - (d+g)}.$$

§. 22. Lex ſecundum quam aequationes illae determinationi primi coëfficientis $\mathfrak{A}$ inſeruientes, procedunt, ſatis bene perſpicitur: eae enim pro diuerſis ordinibus aequationum homogenearum ita procedunt:

$$\text{I. } \mathfrak{A}^2 - \frac{b+c}{a}\mathfrak{A} + \frac{d}{a} = 0,$$
$$\text{II. } \mathfrak{A}^3 - \frac{b+d}{a}\mathfrak{A}^2 + \frac{c+e}{a}\mathfrak{A} - \frac{f}{a} = 0,$$
$$\text{III. } \mathfrak{A}^4 - \frac{b+e}{a}\mathfrak{A}^3 + \frac{c+f}{a}\mathfrak{A}^2 - \frac{d+g}{a}\mathfrak{A} + \frac{h}{a} = 0,$$
$$\text{IV. } \mathfrak{A}^5 - \frac{b+f}{a}\mathfrak{A}^4 + \frac{c+g}{a}\mathfrak{A}^3 - \frac{d+h}{a}\mathfrak{A}^2 + \frac{e+i}{a}\mathfrak{A} - \frac{k}{a} = 0.$$

et ita porro.

§. 23. Minus manifeſta eſt lex, ſecundum quam primi exponentes α in ſingulis ordinibus procedunt. Inueneramus enim:

Pro ordine I. $\alpha = \frac{b - a\mathfrak{A}}{a(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})}$,

- - - - II. $\alpha = \frac{a\mathfrak{A}^2 - b\mathfrak{A} + c}{3a\mathfrak{A}^2 - 2(b+d)\mathfrak{A} + (c+e)}$,

- - - - III. $\alpha = \frac{a\mathfrak{A}^3 - b\mathfrak{A}^2 + c\mathfrak{A} - d}{4a\mathfrak{A}^3 - 3(b+e)\mathfrak{A}^2 + 2(c+f)\mathfrak{A} - (d+g)}$,

vbi primus a lege in reliquis perſpicua excipiendus videtur. Verum ſi hunc primum ipſius α valorem ita repraeſentemus:

$$\alpha = \frac{a\mathfrak{A} - b}{2a\mathfrak{A} - a(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})},$$

tum ob $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \frac{b+c}{a}$ habebimus $\alpha = \frac{a\mathfrak{A} - b}{2a\mathfrak{A} - (b+c)}$. Nunc igi-

igitur lex progreſſionis valorum α pro omnibus ordinibus luculenter perſpicitur. Eſt enim:

Pro ordine I. $\alpha = \frac{a\mathfrak{A} - b}{2a\mathfrak{A} - (b+c)}$,

- - - II. $\alpha = \frac{a\mathfrak{A}^2 - b\mathfrak{A} + c}{3a\mathfrak{A}^2 - 2(b+d)\mathfrak{A} + (c+e)}$,

- - - III. $\alpha = \frac{a\mathfrak{A}^3 - b\mathfrak{A}^2 + c\mathfrak{A} - d}{4a\mathfrak{A}^3 - 3(b+e)\mathfrak{A}^2 + 2(c+f)\mathfrak{A} - (d+g)}$,

et ita porro.

§. 24. Ceterum circa hanc integrandi methodum adhuc in genere notandum eſt, ſi inter factores illos denominatoris aequationem propoſitam integrabilem reddentis, duo pluresue fuerint aequales, tum ea cautela eſſe vtendum, quae in Calculo Integrali ab Eulero eſt propoſita. Quin etiam, ſi factores imaginarii prodierint, bini coniuncti dabunt factorem trinomialem, vnde fractio partialis formabitur, cuius integrale non ſolum logarithmos, ſed etiam arcus circulares complectetur.

ENO.

Digitized by Google

ENODATIO DIFFICVLTATIS AB Ill. EVLERO IN DISSERTATIONE DE INTEGRATIONIBVS MEMORABILIBVS EX CALCVLO IMAGINARIORVM ORIVNDIS GEOMETRIS PROPOSITAE.

Auctore
NICOLAO FVSS.

Conuent. exhib. die 18 *Nov.* 1790.

§. 1.

Valor formulae integralis $\int \frac{z^{m-1} \partial z}{1 + z^n}$ quomodo inueſtigari debeat, ſi z denotet quantitatem realem, iam pridem a ſummo noſtro Eulero in Tomo primo Inſtitutionum Calculi Integralis, poſtea vero, methodo magis directa, in Tomo XIX. Nouorum Commentariorum fuit oſtenſum. Quemadmodum autem haec integratio inſtituenda ſit, ſi variabilis z fuerit quantitas imaginaria quaecunque, demum ex diſſertatione in titulo commemorata diſcimus. Eximia ſane ſunt, dignaque tanti viri, artificia calculi quibus in tractandis huiusmodi formulis vſus eſt Eulerus; imprimis autem integratio formulae $\int \frac{z^{m-1} \partial z}{1 - z^n}$, in ſupplemento tradita, ſummam attentionem meretur, ob plurimas difficultates feliciter ſuperatas, multoque magis propter difficultates, quas celeberrimus auctor aliis ſuperandas reliquit.

§. 2.

Digitized by Google

§. 2. Duplicem autem Eulerus viam ingreſſus eſt, ad integrale modo dictae formulae perueniendi, quarum poſtrema potiſſimum nobis occaſionem aperuit obſeruationes nonnullas laudatae diſſertationi ſubnectere. Quoniam enim ſecunda methodus, ſimplicitate calculorum priori longe anteferenda, principiis innititur non ſatis firmiter, vt ipſe auctor fatetur, ſtabilitis, non omnino ſuperfluum erit eam accuratiori examini ſubiicere, variaque dubia, quibus haec ſolutio adhuc obnoxia eſt, pro viribus diluere. Ceterum, quamuis in expoſitione prioris methodi varia compendia calculi exhibere poſſem: tamen a repetitione principiorum, quibus innititur, merito abſtineo; animo enim eorum, qui praecedentem diſſertationem attente perlegerunt, omnia momenta, quibus pro ſcopo noſtro indigemus, non infixa eſſe non poſſunt; qui autem illam diſſertationem non legerunt, etiam dilucidationes noſtras parum curabunt. In genere igitur, ad omnia ſequentia bene intelligenda ſufficiet meminiſſe, Eulerum formulam propoſitam in vtraque ſolutione in fractiones partiales decompoſuiſſe huius formae: $\frac{F}{1-2v\,\text{coſ.}\,\omega+vv}$, integrale vero, ex vnaquaque harum fractionum oriundum, quoniam, ob $z = v(\text{coſ.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi)$, ex partibus realibus et imaginariis conflatum eſſe debet, ita indicaſſe: $P + Q\sqrt{-1}$, atque pro P et Q ſequentes adeptum eſſe valores:

$$P = \frac{\text{ſin.}\,\zeta}{n}\,\text{A tang.}\,\frac{v\,\text{ſin.}\,\omega}{1-v\,\text{coſ.}\,\omega} - \frac{\text{coſ.}\,\zeta}{n}\,l\sqrt{(1-2v\,\text{coſ.}\,\omega+vv)},$$

$$Q = -\frac{\text{coſ.}\,\zeta}{n}\,\text{A tang.}\,\frac{v\,\text{ſin.}\,\omega}{1-v\,\text{coſ.}\,\omega} - \frac{\text{ſin.}\,\zeta}{n}\,l\sqrt{(1-2v\,\text{coſ.}\,\omega+vv)},$$

denotante ζ angulum conſtantem $\frac{m i \pi}{n}$, i numerum parem quemcunque, minorem quam $2n$, et π duos angulos rectos.

§. 3. Hoc igitur modo totum integrale cuiusque fractionis partialis $P + Q\sqrt{-1}$ ex quatuor partibus, duobus nimirum realibus, totidemque imaginariis erit compoſitum; verum haud difficulter numerus membrorum ad ſemiſſem reducitur,

citur, quae reductio, tam ob maiorem expreſſionis inde reſultantis ſimplicitatem quam ob vſum, quem nobis in ſequentibus praeſtare poterit, heic explicari meretur. Cum igitur ex elementis calculi integralis nouerimus eſſe:

$$\text{A tang. } t = -\sqrt{-1} \,.\, l \sqrt{\frac{1+t\sqrt{-1}}{1-t\sqrt{-1}}} = -\sqrt{-1} \,.\, l \sqrt{\frac{(1+t\sqrt{-1})^2}{1+tt}},$$

ponatur $t = \frac{v \,\text{ſin.}\, \omega}{1 - v \,\text{coſ.}\, \omega}$, atque ob $v = \text{coſ.}\, \omega + \sqrt{-1} \,\text{ſin.}\, \omega$, (V. Praec. diſſ. §. 46. et §. 25. Suppl.) ideoque $\sqrt{-1} \,\text{ſin.}\, \omega = v - \text{coſ.}\, \omega$, erit:

$$1 + t\sqrt{-1} = \frac{1 - v \,\text{coſ.}\, \omega + v(v - \text{coſ.}\, \omega)}{1 - v \,\text{coſ.}\, \omega},$$

$$(1 + t\sqrt{-1})^2 = \frac{(1 - 2 v \,\text{coſ.}\, \omega + vv)^2}{(1 - v \,\text{coſ.}\, \omega)^2},$$

$$1 + tt = \frac{1 - 2 v \,\text{coſ.}\, \omega + vv}{(1 - v \,\text{coſ.}\, \omega)^2},$$

quibus ſubſtitutis habebimus

$$\text{A tang. } \frac{v \,\text{ſin.}\, \omega}{1 - v \,\text{coſ.}\, \omega} = -\sqrt{-1} \,.\, l \sqrt{(1 - 2 v \,\text{coſ.}\, \omega + vv)},$$

vnde porro concluditur fore

$$Q\sqrt{-1} = \frac{\text{ſin.}\, \zeta}{n} \text{A tang. } \frac{v \,\text{ſin.}\, \omega}{1 - v \,\text{coſ.}\, \omega} - \frac{\text{coſ.}\, \zeta}{n} \, l \sqrt{(1 - 2 v \,\text{coſ.}\, \omega + vv)},$$

cui ſi valor ipſius P addatur, totum integrale ita prodit expreſſum:

$$P + Q\sqrt{-1} = \frac{2 \,\text{ſin.}\, \zeta}{n} \text{A tang. } \frac{v \,\text{ſin.}\, \omega}{1 - v \,\text{coſ.}\, \omega} - \frac{2 \,\text{coſ.}\, \zeta}{n} \, l \sqrt{(1 - 2 v \,\text{coſ.}\, \omega + vv)}.$$

§. 4. His praemiſſis ad numeratorem illum F fractionis partialis reuertamur, et quo, quae dicenda habemus, quantum fieri poteſt in compendium redigantur, ponatur $F = \partial p + \partial q \sqrt{-1}$, ita vt ſit:

$$P = \int \frac{\partial p}{1 - 2 v \,\text{coſ.}\, \omega + vv},$$

$$Q = \int \frac{\partial q}{1 - 2 v \,\text{coſ.}\, \omega + vv},$$

hisque nouis litteris p et q introductis ſolutio prima noſtri auctoris

toris ſequentes praebuit valores:

$$\partial p = \begin{cases} -\frac{\partial v}{n}[v \text{ coſ. } \zeta - \text{coſ. }(\zeta - \omega)] \\ +\frac{v \partial \Phi}{n}[v \text{ ſin. } \zeta - \text{ſin. }(\zeta - \omega)] \end{cases}$$

$$\partial q = \begin{cases} -\frac{\partial v}{n}[v \text{ ſin. } \zeta - \text{ſin. }(\zeta - \omega)] \\ -\frac{v \partial \Phi}{n}[v \text{ coſ. } \zeta - \text{coſ. }(\zeta - \omega)]. \end{cases}$$

Altera autem ſolutio hunc pro $F = \partial p + \partial q \sqrt{-1}$ ſuppeditauit valorem:

$$F = \begin{cases} +\frac{2 \partial v}{n} \text{ ſin. } \omega (\text{ſin. } \zeta - \sqrt{-1} \text{ coſ. } \zeta) \\ +\frac{2 v \partial \Phi}{n} \text{ ſin. } \omega (\text{coſ. } \zeta + \sqrt{-1} \text{ ſin. } \zeta). \end{cases}$$

§. 5. Quod ſi iam ex hac poſtrema expreſſione litteras P et Q determinare voluerimus; quis non crederet partes reales ſumendas eſſe pro ∂p, imaginarias vero, per $\sqrt{-1}$ diviſas, pro ∂q? *Verum hinc*, inquit Eulerus in Supplementi ad ſuperiorem diſſertationem §. 24, *in craſſiſſimum errorem illaberemur, quemadmodum ex collatione cum ſuperiore ſolutione manifeſtum eſt. Interim tamen obſeruaui, ex hac ipſa formula veros valores pro P et Q elici poſſe: ſcilicet pro valore ipſius P inueniendo tota haec formula, ex realibus et imaginariis permixta, in valorem realem transformetur; tum enim eius ſemiſſis pro littera P valebit. Simili modo pro littera Q eandem expreſſionem totam in formam ſimpliciter imaginariam transfundi oportet, cuius pariter ſemiſſis pro valore litterae Q adhiberi debebit.*

§. 6. Hunc procedendi modum, merae obſeruationi, ſubtiliſſimae quidem, innitentem, et quaſi diuinando erutum, Illuſt. auctor actu executus et tandem ſolutionem adeptus eſt cum prima prorſus conuenientem, cui autem, quoniam ratio partitionis illius cum numeratore F inſtitutae, non ſatis eſt manife-

nifeſta, finem facit his verbis: *Quoniam haec ſolutio tam egregie cum praecedente conuenit, id profecto caſui fortuito tribui nequit; quamobrem mihi quidem haec ſolutio prorſus ſingularis haud parum in receſſu habere videtur, vnde eam Geometris perſcrutandam proponere non dubito, vt eius ſoliditatem ex firmis principiis deriuare conentur.*

§. 7. Maxime probabile videtur, Eulerum noſtrum, cum hoc argumentum, imperfectum quodammodo, deſeruerit, niſi forte de induſtria hoc fecit, ad alias properaſſe disquiſitiones magis arduas, quarum haud raro plus vna ſimul ruminabat. Si enim vel centeſimam partem vis illius admirandae ingenii, qua pollebat, impendere voluiſſet ad iſta dubia tollenda, nihil profecto nobis ſuper hoc argumento deſiderandum reſtaret. Quum autem, quod maxime dolendum, hanc lacunam aliis ſupplendam reliquiſſet; nec actum egiſſe, neque nimium mihi ſumſiſſe videar, ſi, verbis Euleri ſupra allatis impulſus, dilucidationes, quas vberius ſolutionum illarum examen mihi ſubminiſtrauit, heic expoſuero.

§. 8. Primo igitur valorem in poſtrema ſolutione pro numeratore F inuentum immediate ex prima ſolutione deriuabo, ſimulque rationem partitionis illius diuinando erutae, perſpicuam faciam. Tum vero ſententiam illam Euleri §. 5. ſupplementi allatam, quod in expreſſione ipſius F partes reales pro ∂p, imaginarias vero pro $\partial q \sqrt{-1}$ ſumere non liceat, examinabo, et oſtendam, quomodo valores inde emergentes tractari debeant, vt ſolutionem cum Euleriana conuenientem ſuppeditent. Denique nouam ſolutionem in medium proferam, vtramque formulam $\int \frac{z^{m-1}\partial z}{1 \pm z^n}$ complectentem, quae non ſolum ex principiis ſolidiſſime demonſtratis ſit deriuata, ſed etiam per calcu-

los nec difficiles neque prolixos ad eandem integralis formam perducat, in quam ſupra §. 3. integrale ab Eulero inuentum contraximus.

§. 9. Quod iam primum noſtrum inſtitutum attinet, ſi in expreſſionibus illis pro ∂p et ∂q ſupra §. 4. allatis, ex priore ſolutione depromtis, poſt vincula loco v ſcribamus eius valorem $\text{coſ.}\,\omega + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\omega$, tum vero ſinus et coſinus anguli $\zeta - \omega$ in ſimplices angulorum ζ et ω ſinus et coſinus euoluamus, eae ſequentem formam induent:

$$\partial p = \begin{cases} + \frac{\partial v}{n}\,\text{ſin.}\,\omega\,(\text{ſin.}\,\zeta - \sqrt{-1}\,\text{coſ.}\,\zeta) \\ + \frac{v\,\partial\Phi}{n}\,\text{ſin.}\,\omega\,(\text{coſ.}\,\zeta + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\zeta) \end{cases}$$

$$\partial q = \begin{cases} - \frac{\partial v}{n}\,\text{ſin.}\,\omega\,(\text{coſ.}\,\zeta + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\zeta) \\ + \frac{v\,\partial\Phi}{n}\,\text{ſin.}\,\omega\,(\text{ſin.}\,\zeta - \sqrt{-1}\,\text{coſ.}\,\zeta) \end{cases}$$

quarum poſterior, ſi in $\sqrt{-1}$ ducatur, praebet

$$\partial q \sqrt{-1} = \begin{cases} + \frac{\partial v}{n}\,\text{ſin.}\,\omega\,(\text{ſin.}\,\zeta - \sqrt{-1}\,\text{coſ.}\,\zeta) \\ + \frac{v\,\partial\Phi}{n}\,\text{ſin.}\,\omega\,(\text{coſ.}\,\zeta + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\zeta) \end{cases}$$

cui ſi prior praecedentium addatur, pro F ſequens enaſcitur valor:

$$F = \partial p + \partial q \sqrt{-1} = \begin{cases} + \frac{2\,\partial v}{n}\,\text{ſin.}\,\omega\,(\text{ſin.}\,\zeta - \sqrt{-1}\,\text{coſ.}\,\zeta) \\ + \frac{2\,v\,\partial\Phi}{n}\,\text{ſin.}\,\omega\,(\text{coſ.}\,\zeta + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\zeta) \end{cases}$$

qui cum illo, quem Eulerus in ſecunda ſolutione invenerat, prorſus congruit. Ex hac transformatione ſimul ratio perſpicitur, cur Eulerus, dum integrale priori ſolutioni prorſus conſentaneum quaerebat, et vtramque partem ∂p et ∂q ſeorſim tractabat, alteram ſemiſſem ipſius F pro ∂p, alteram vero, per $\sqrt{-1}$ diuiſam, pro ∂q ſumere debuerit. Quamquam autem hoc modo ratio partitionis illius ab Eulero factae, ſatis bene intelligitur: tamen eius ſolutio ſecunda, vt ipſiusmet verbis lo-

loquar, iſta eſt comparata, *vt eius bonitas nequidem perſpici queat, atque eatenus tantum valeat, quatenus ad veritatem iam aliunde cognitam perducat.*

§. 10. Nunc ad ſecundum propoſitum nos conferamus et oſtendamus, contra ſententiam Euleri, in ſecunda eius ſolutione nihil impedire, quo minus ex valore pro F invento realia pro ∂p, imaginaria vero pro $\partial q \sqrt{-1}$ depromantur. Fiat igitur haec partitio maxime naturalis, prodibitque

$$\partial p = \frac{2\,\text{ſin.}\,\zeta}{n} . \partial v\,\text{ſin.}\,\omega + \frac{2\,\text{coſ.}\,\zeta}{n} . v\,\partial \Phi\,\text{ſin.}\,\omega$$

$$\partial q = \frac{2\,\text{ſin.}\,\zeta}{n} . v\,\partial \Phi\,\text{ſin.}\,\omega - \frac{2\,\text{coſ.}\,\zeta}{n} . \partial v\,\text{ſin.}\,\omega$$

vnde, ob $\omega + \Phi = \frac{i\pi}{n}$, ideoque $\partial \Phi = -\partial \omega$ partes integralis quaeſiti erunt

$$P = \frac{2\,\text{ſin.}\,\zeta}{n} \int \frac{\partial v\,\text{ſin.}\,\omega}{1 - 2v\,\text{coſ.}\,\omega + vv} - \frac{2\,\text{coſ.}\,\zeta}{n} \int \frac{v\,\partial \omega\,\text{ſin.}\,\omega}{1 - 2v\,\text{coſ.}\,\omega + vv}$$

$$Q = -\frac{2\,\text{ſin.}\,\zeta}{n} \int \frac{v\,\partial \omega\,\text{ſin.}\,\omega}{1 - 2v\,\text{coſ.}\,\omega + vv} - \frac{2\,\text{coſ.}\,\zeta}{n} \int \frac{\partial v\,\text{ſin.}\,\omega}{1 - 2v\,\text{coſ.}\,\omega + vv}.$$

Quodſi iam hic integralia

$$\int \frac{\partial v\,\text{ſin.}\,\omega}{1 - 2v\,\text{coſ.}\,\omega + vv} \text{ et } \int \frac{v\,\partial \omega\,\text{ſin.}\,\omega}{1 - 2v\,\text{coſ.}\,\omega + vv}$$

ita caperentur, vt ſcilicet in priore formula tantum variabilitatis ipſius v, in altera vero ſolius ω teneatur ratio, vtique ad ſolutionem valde erroneam perduceremur. Cum enim, modo dicta ratione integrando, facile inueniatur fore:

$$\int \frac{\partial v\,\text{ſin.}\,\omega}{1 - 2v\,\text{coſ.}\,\omega + vv} = \text{A tang.}\,\frac{v\,\text{ſin.}\,\omega}{1 - v\,\text{coſ.}\,\omega}$$

$$\int \frac{v\,\partial \omega\,\text{ſin.}\,\omega}{1 - 2v\,\text{coſ.}\,\omega + vv} = l\sqrt{(1 - 2v\,\text{coſ.}\,\omega + vv)}$$

hinc porro colligitur

$$P = \frac{2\,\text{ſin.}\,\zeta}{n}\,\text{A tang.}\,\frac{v\,\text{ſin.}\,\omega}{1 - v\,\text{coſ.}\,\omega} - \frac{2\,\text{coſ.}\,\zeta}{n}\,l\sqrt{(1 - 2v\,\text{coſ.}\,\omega + vv)}$$

$$Q = -\frac{2\,\text{coſ.}\,\zeta}{n}\,\text{A tang.}\,\frac{v\,\text{ſin.}\,\omega}{1 - v\,\text{coſ.}\,\omega} - \frac{2\,\text{ſin.}\,\zeta}{n}\,l\sqrt{(1 - 2v\,\text{coſ.}\,\omega + vv)}$$

qui valores exacte duplo maiores ſunt illis, quos Eulerus per priorem methodum inuenerat.

Digitized by Google

§. 11. Hic autem probe tenendum eſt in ſingula quaque formularum integralium, ad quas modo peruenimus, vtriusque variabilis rationem habendam eſſe, ſi vera ſolutio deſideretur. Ad quam igitur eliciendam ſumatur differentiale tam arcus quam logarithmi, et cum fiat

$$\partial . \text{A tang.} \frac{v \sin. \omega}{1 - v \cos. \omega} = \frac{\partial v \sin. \omega - v \partial \omega [v - \cos. \omega)}{1 - 2 v \cos. + v v},$$

$$\partial . l \sqrt{(1 - 2 v \cos. \omega + v v)} = \frac{v \partial \omega \sin. \omega + \partial v (v - \cos. \omega)}{1 - 2 v \cos. \omega + v v};$$

hinc ſequitur fore

$$\int \frac{\partial v \sin. \omega}{1 - 2 v \cos. \omega + v v} = \text{A tang.} \frac{v \sin. \omega}{1 - v \cos. \omega} + \int \frac{v \partial \omega (v - \cos. \omega)}{1 - 2 v \cos. \omega + v v}$$

$$\int \frac{v \partial \omega \sin. \omega}{1 - 2 v \cos. \omega + v v} = l \sqrt{(1 - 2 v \cos. \omega + v v)} - \int \frac{\partial v (v - \cos. \omega)}{1 - 2 v \cos. \omega + v v}$$

quibus valoribus ſubſtitutis pro P naſcitur iſta expreſſio:

$$P = \begin{cases} \frac{2 \sin. \zeta}{n} \text{A tang.} \frac{v \sin. \omega}{1 - v \cos. \omega} + \frac{2 \sin. \zeta}{n} \int \frac{v \partial \omega (v - \cos. \omega)}{1 - 2 v \cos. \omega + v v} \\ - \frac{2 \cos. \zeta}{n} l \sqrt{(1 - 2 v \cos. \omega + v v)} + \frac{2 \cos. \zeta}{n} \int \frac{\partial v (v - \cos. \omega)}{1 - 2 v \cos. \omega + v v}. \end{cases}$$

Cum autem ſit

$$Q = - \frac{2 \sin. \zeta}{n} \int \frac{v \partial \omega \sin. \omega}{1 - 2 v \cos. \omega + v v} - \frac{2 \cos. \zeta}{n} \int \frac{\partial v \sin. \omega}{1 - 2 v \cos. \omega + v v},$$

ob $\sin. \omega . \sqrt{-1} = v - \cos. \omega$, erit

$$Q \sqrt{-1} = - \frac{2 \sin. \zeta}{n} \int \frac{v \partial \omega (v - \cos. \omega)}{1 - 2 v \cos. \omega + v v} - \frac{2 \cos. \zeta}{n} \int \frac{\partial v (v - \cos. \omega)}{1 - 2 v \cos. \omega + v v}$$

quo valore priori addito termini ſigno integrationis affecti ſe mutuo deſtruent prodibitque integrale quaeſitum

$$P + Q \sqrt{-1} = \frac{2 \sin. \zeta}{n} \text{A tang.} \frac{v \sin. \omega}{1 - v \cos. \omega} - \frac{2 \cos. \zeta}{n} l \sqrt{(1 - 2 v \cos. \omega + v v)}$$

quod cum integrali per priorem methodum ab auctore eruto, ſupra §. 3. a nobis ſimplificato, prorſus convenit.

§. 12. Hoc igitur modo ſententia illa Ill. Euleri, §. 24. ſupplementi prolata, quae mihi ſtatim maxime paradoxa et cum principiis Calculi Imaginariorum nequaquam concilianda, erat viſa, nunc penitus euertitur. Interim autem fatendum eſt, hanc methodum, etiamſi ad veram ſolutionem ſatis

tis commode perducat, eodem tamen fere laborare incommodo, quod Eulerus, ſecunda ſua ſolutione parum ipſe, vt ſcimus, contentus, in ea reprehendit, eo nimirum, quod, niſi verum integrale iam aliunde innotuiſſet, haec methodus vix, ac ne vix quidem ſuccedere potuiſſet. Tranſeamus igitur ad nouam noſtram ſolutionem, quae ab hoc vitio plane immunis eſt.

Integratio formulae

$$\int \frac{z^{m-1}\,\partial z}{1 \pm z^n}$$

exiſtente $z = v\,(\text{coſ.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\Phi)$.

§. 13. Statuatur formula differentialis

$$\frac{z^{m-1}\,\partial z}{1 \pm z^n} = \frac{\partial Z}{1 - 2\,v\,\text{coſ.}\,\omega + v\,v} + R$$

denotante R omnes reliquas fractiones partiales, in quas illam formulam reſoluere licet, factaque multiplicatione per $1 - 2\,v\,\text{coſ.}\,\omega + v\,v$ habebitur

$$\frac{z^{m-1}\,\partial z\,(1 - 2\,v\,\text{coſ.}\,\omega + v\,v)}{1 \pm z^n} = \partial Z + R\,(1 - 2v\,\text{coſ.}\,\omega + vv)$$

vnde poſito $1 - 2\,v\,\text{coſ.}\,\omega + v\,v = 0$, hoc eſt $v = \text{coſ.}\,\omega + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,\omega$, quoniam tum etiam fit $1 \pm z^n = 0$, emergit valor numeratoris

$$\partial Z = z^{m-1}\partial z . \frac{1 - 2\,v\,\text{coſ.}\,\omega + v\,v}{1 \pm z^n} = z^{m-1}\partial z . \frac{0}{0} .$$

Quod ſi iam in fractione $\frac{1 - 2\,v\,\text{coſ.}\,\omega + v\,v}{1 \pm z^n}$ tam numeratoris

ris quam denominatoris differentiale ſumatur, tum vero ſupra et infra per z multiplicetur, prodibit

$$\partial Z = z^m . \frac{2 \partial v (v - \text{coſ.}\, \omega) + 2 v \partial \omega \,\text{ſin.}\, \omega}{\pm n z^n}.$$

§. 14. Quo nunc litteram z ex calculo remoueamus, notemus eſſe

$$z^m = v^m (\text{coſ.}\, m\,\Phi + \sqrt{-1}\, \text{ſin.}\, m\,\Phi)$$

$$v^m = \text{coſ.}\, m\,\omega + \sqrt{-1}\, \text{ſin.}\, m\,\omega$$

vnde fit

$$z^m = \text{coſ.}\, m\,(\omega + \Phi) + \sqrt{-1}\, \text{ſin.}\, m\,(\omega + \Phi)$$

ita vt, ob $m\,(\omega + \Phi) = \frac{m i \pi}{n} = \zeta$, habeamus

$$z^m = \text{coſ.}\, \zeta + \sqrt{-1}\, \text{ſin.}\, \zeta$$

tum vero, quoniam $1 \pm z^n = 0$, ideoque $z^n = \mp 1$, his ſubſtitutis erit

$$\partial Z = \frac{\text{coſ.}\, \zeta + \sqrt{-1}\, \text{ſin.}\, \zeta}{-n} [2 \partial v (v - \text{coſ.}\, \omega) + 2 v \partial \omega \,\text{ſin.}\, \omega]$$

qui valor ſequenti modo repraeſentetur:

$$\partial Z = \begin{cases} - \frac{2\, \text{ſin.}\, \zeta}{n} [\partial v \sqrt{-1}\, (v - \text{coſ.}\, \omega) + v \partial \omega \sqrt{-1}\, \text{ſin.}\, \omega] \\ - \frac{2\, \text{coſ.}\, \zeta}{n} [\partial v\, (v - \text{coſ.}\, \omega) + v \partial \omega \,\text{ſin.}\, \omega]. \end{cases}$$

Eſt vero

$$(v - \text{coſ.}\, \omega) \sqrt{-1} = - \text{ſin.}\, \omega \text{ et}$$

$$\sqrt{-1}\, . \,\text{ſin.}\, \omega = v - \text{coſ.}\, \omega$$

quibus ſubſtitutis imaginaria erunt expulſa, prodibitque

$$\partial Z = \begin{cases} + \frac{2\, \text{ſin.}\, \zeta}{n} [\partial v \,\text{ſin.}\, \omega - v \partial \omega (v - \text{coſ.}\, \omega)] \\ - \frac{2\, \text{coſ.}\, \zeta}{n} [v \partial \omega \,\text{ſin.}\, \omega + \partial v (v - \text{coſ.}\, \omega)]. \end{cases}$$

Quod ſi iam integrale fractionis illius $\frac{\partial Z}{1 - 2 v\, \text{coſ.}\, \omega + v v}$ littera V deſignetur, erit

V

Digitized by Google

$$V = \frac{2 R \, \text{ſin.} \zeta}{n} - \frac{2 S \, \text{coſ.} \zeta}{n}$$

exiſtentibus

$$R = \int \frac{\partial v \, \text{ſin.} \, \omega - v \, \partial \omega \, (v - \text{coſ.} \, \omega)}{1 - 2 v \, \text{coſ.} \, \omega + v v}$$

$$S = \int \frac{v \, \partial \omega \, \text{ſin.} \, \omega + \partial v \, (v - \text{coſ.} \, \omega)}{1 - 2 v \, \text{coſ.} \, \omega + v v}.$$

§. 15. Hic quidem ſtatim valores R et S ex §. 11. depromere poſſemus, vbi per differentiationem erant inuenti; verum ne haec ſolutio vllo modo a praecedentibus pendere videatur, conſultius erit hos valores a priori per integrationem inueſtigare. Pro priore igitur ſtatuamus

$$x = v \, \text{ſin.} \, \omega, \; y = 1 - v \, \text{coſ.} \, \omega,$$

ita vt ſit

$$x x + y y = 1 - 2 v \, \text{coſ.} \, \omega + v v,$$

et differentiando colligitur

$$\partial x = \partial v \, \text{ſin.} \, \omega + v \, \partial \omega \, \text{coſ.} \, \omega,$$

$$\partial y = - \partial v \, \text{coſ.} \, \omega + v \, \partial \omega \, \text{ſin.} \, \omega;$$

vnde porro fit

$$y \, \partial x - x \, \partial y = \partial v \, \text{ſin.} \, \omega - v \, \partial \omega \, (v - \text{coſ.} \, \omega);$$

hincque deducitur

$$R = \int \frac{y \, \partial x - x \, \partial y}{x x + y y} = \text{A tang.} \frac{x}{y} = \text{A tang.} \frac{v \, \text{ſin.} \, \omega}{1 - v \, \text{coſ.} \, \omega}.$$

Pro altera ponatur $1 - 2 v \, \text{coſ.} \, \omega + v v = s s$, eritque differentiando

$$v \, \partial \omega \, \text{ſin.} \, \omega + \partial v \, (v - \text{coſ.} \, \omega) = s \, \partial s,$$

vnde ſtatim manifeſtum eſt fore

$$S = \int \frac{\partial s}{s} = l s = l \sqrt{(1 - 2 v \, \text{coſ.} \, \omega + v v)},$$

quibus igitur valoribus inuentis integrale quaeſitum erit

$$V = \frac{2 \, \text{ſin.} \zeta}{n} \, \text{A tang.} \frac{v \, \text{ſin.} \, \omega}{1 - v \, \text{coſ.} \, \omega} - \frac{2 \, \text{coſ.} \zeta}{n} \, l \sqrt{(1 - 2 v \, \text{coſ.} \, \omega + v v)},$$

 quod

quod cum integrali ab Eulero inuento et §. 3. a nobis contracto prorſus conuenit, illique, quod pro eadem formula $\int \frac{z^{m-1} \partial z}{1 \pm z^n}$ reali, in Calculo Integrali pag. 46 et 49 extat, plane ſimile eſt, vti rei natura poſtulat. Si enim pro noſtro caſu ſumatur $\Phi = 0$, v abit in z, ω in $\frac{i\pi}{n}$, quibus valoribus vna cum $\zeta = \frac{mi\pi}{n}$ ſubſtitutis habebimus pro z reali

$$V = \frac{2}{n} \text{ſin.} \frac{mi\pi}{n} \text{A tang.} \frac{z \text{ ſin.} \frac{i\pi}{n}}{1 - z \text{ coſ.} \frac{i\pi}{n}}$$

$$- \frac{2}{n} \text{coſ.} \frac{mi\pi}{n} l \sqrt{(1 - 2z \text{ coſ.} \frac{i\pi}{n} + zz)},$$

quod ab integrali loco citato exhibito omnino non differt.

§. 16. Sub hac igitur forma

$$V = \frac{2 \text{ ſin.} \zeta}{n} \text{A tang.} \frac{v \text{ ſin.} \omega}{1 - v \text{ coſ.} \omega} - \frac{2 \text{ coſ.} \zeta}{n} l \sqrt{(1 - 2v \text{ coſ.} \omega + vv)}$$

integrale vtriuſque formulae

$$\int \frac{z^{m-1} \partial z}{1 + z^n} \text{ et } \int \frac{z^{m-1} \partial z}{1 - z^n}$$

comprehenditur: tota enim differentia in hoc eſt ſita, quod pro priori loco i ſucceſſiue omnes numeri impares 1, 3, 5, 7, vſque ad $2n - 1$ ſint ſcribendi, pro altera vero numeri pares 0, 2, 4; 6, etc. vſque ad $2n - 2$, tot ſcilicet, quot denominator factores habet, quae omnia in diſſertatione praecedente fuſius explicata reperiuntur, ita vt non opus ſit iis diutius immorari. Hoc tantum, quoniam integrale ſub forma reali repraeſentauimus, notaſſe iuuabit: ſi ipſi formam $P + Q\sqrt{-1}$ tribuere velimus, fore

$$P = \frac{2 \text{ ſin.} \zeta}{n} \text{A tang.} \frac{v \text{ ſin.} \omega}{1 - v \text{ coſ.} \omega},$$

$$Q = - \frac{2 \text{ coſ.} \zeta}{n} \text{A tang.} \frac{v \text{ ſin.} \omega}{1 - v \text{ coſ.} \omega},$$

ſiue, ſi logarithmos deſideremus:

P =

Digitized by Google

$$P = -\frac{2\,cof.\,\zeta}{n}\,l\sqrt{(1 - 2v\,cof.\,\omega + vv)};$$

$$Q = -\frac{2\,ſin.\,\zeta}{n}\,l\sqrt{(1 - 2v\,cof.\,\omega + vv)};$$

tum autem integrale ita exhiberi poteſt:

$$V = \frac{2}{n}(ſin.\,\zeta - \sqrt{-1}\,cof.\,\zeta)\ A\,tang.\,\frac{v\,ſin.\,\omega}{1 - v\,cof.\,\omega};$$

ſiue etiam hoc modo:

$$V = -\frac{2}{n}(cof.\,\zeta + \sqrt{-1}\,ſin.\,\zeta)\,l\sqrt{(1 - 2v\,cof.\,\omega + vv)}.$$

§. 17. Harum formularum ſubſidio (perinde autem eſt quanam, quouis caſu oblato, vti velimus) omnia exempla in ſuperiore diſſertatione expedita, vehementer contrahuntur. Nam $\int\frac{1 \pm z^3}{\partial z}$ ex. gr. apud Eulerum formula exprimitur ex decem partibus conſtante, cum tamen, ſi alterutram noſtrarum expreſſionum adhibeamus, integrale prodeat ex tribus tantum partibus, vtramque variabilem v et Φ continentibus, compoſitum. Quo hoc melius perſpici queat, operae pretium videtur aliquot caſus ſimpliciores hic conſpectui exponere. Erit igitur pro valore $z = v(cof.\,\Phi + \sqrt{-1}\,ſin.\,\Phi)$:

I. $$\int\frac{\partial z}{1 + z} = 2\,l\sqrt{(1 + 2v\,cof.\,\Phi + vv)}.$$

II. $$\int\frac{\partial z}{1 - z} = -2\,l\sqrt{(1 - 2v\,cof.\,\Phi + vv)}.$$

III. $$\int\frac{\partial z}{1 + zz} = A\,tang.\,\frac{2v\,cof.\,\Phi}{1 - vv}.$$

IV. $$\int\frac{\partial z}{1 - zz} = l\sqrt{\frac{1 + 2v\,cof.\,\Phi + vv}{1 - 2v\,cof.\,\Phi + vv}}.$$

V. $$\int\frac{\partial z}{1 + z^3} = \begin{cases} \frac{2}{3}\,l\sqrt{(1 + 2v\,cof.\,\Phi + vv)} \\ + \frac{1}{3}(\sqrt{3} - \sqrt{-1})\,A\,tang.\,\frac{v\,ſin.\,(60^\circ - \Phi)}{1 - v\,cof.\,(60^\circ - \Phi)} \\ + \frac{1}{3}(\sqrt{3} + \sqrt{-1})\,A\,tang.\,\frac{v\,ſin.\,(60^\circ + \Phi)}{1 - v\,cof.\,(60^\circ + \Phi)}. \end{cases}$$

VI. $$\int\frac{\partial z}{1 - z^3} = \begin{cases} -\frac{2}{3}\,l\sqrt{(1 - 2v\,cof.\,\Phi + vv)} \\ + \frac{1}{3}(\sqrt{3} + \sqrt{-1})\,A\,tang.\,\frac{v\,ſin.\,(60^\circ + \Phi)}{1 + v\,cof.\,(60^\circ + \Phi)} \\ + \frac{1}{3}(\sqrt{3} - \sqrt{-1})\,A\,tang.\,\frac{v\,ſin.\,(60^\circ - \Phi)}{1 + v\,cof.\,(60^\circ - \Phi)}. \end{cases}$$

VII.

Digitized by Google

$$\text{VII. } \int \frac{\partial z}{1+z^4} = \frac{1-\sqrt{-1}}{2\sqrt{2}} \text{ A tang. } \frac{2v \sin.(45^\circ - \Phi)}{1-vv}$$
$$+ \frac{1+\sqrt{-1}}{2\sqrt{2}} \text{ A tang. } \frac{2v \sin.(45^\circ + \Phi)}{1-vv}.$$
$$\text{VIII. } \int \frac{\partial z}{1-z^4} = \tfrac{1}{2} l \sqrt{\frac{1+2v\cos.\Phi+vv}{1-2v\cos.\Phi+vv}} + \tfrac{1}{2} \text{ A tang. } \frac{2v\cos.\Phi}{1-vv}.$$

Ceterum circa haec integralia adhuc notandum eſt, ea quae commode contrahi poterant, veluti III, IV, VII et VIII, in ſimpliciſſimam formam eſſe reducta, quod monendum erat, ne ordo in reliquis perſpicuus, interruptus videatur.

§. 18. Denique ſilentio non praetereundum eſt, hic circumſtantiam illam prorſus ſingularem (C. Nov. Comm. T. XIX. p. 14.) locum non habere, quae in integratione noſtrae formulae occurrit, dum z reale ſtatuitur: quod ſcilicet caſibus $i = 0$ et $i = n$ partium integralis ex his valoribus naſcentium tantum ſemiſſis ſit capienda. Integralia enim modo tradita omnia rite ſibi conſtant, quemadmodum ex immediata integratione facile eſt videre. Contra vero ſi haec integralia caſui, quo z reale aſſumitur, accommodare velimus, tum cuiuſque partis tantum ſemiſſis ſumenda eſt. Nam ſi ponatur $\Phi = 0$ et $v = z$, prodit

$$\int \frac{\partial z}{1+z} = 2\, l\,(1+z)$$
$$\int \frac{\partial z}{1-z} = -\, 2\, l\,(1-z)$$
$$\int \frac{\partial z}{1+zz} = \text{A tang. } \frac{2z}{1-zz} = 2 \text{ A tang. } z$$
$$\int \frac{\partial z}{1-zz} = l\, \frac{1+z}{1-z}$$

etc.

qui quatuor valores altero tanto veros manifeſto excedunt; cuius phaenomeni ratio in contractione formae generalis eſt quaerenda, quae huic caſui, ob permiſtionem quantitatum realium et imaginariorum, non eſt accommodata.

Digitized by Google

PHYSICO-
MATHEMATICA.

Digitized by Google

Digitized by Google

DE
MOMENTIS VIRIVM
RESPECTV AXIS CVIVSCVNQVE INVENIENDIS;
VBI PLVRA INSIGNIA SYMPTOMATA CIRCA BINAS RECTAS, NON IN EODEM PLANO SITAS, EXPLICANTVR.

Auctore

L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 14 *Aug.* 1780.

Si propoſita fuerit vis quaecunque V, in directione AZ vrgens, pro eius momento reſpectu axis az, vtcunque ſiti, inueſtigando praecepta ſtatica hanc ſuppeditant regulam: *Ex puncto quocunque V, in recta AZ aſſumto, ducatur ad alteram rectam az perpendicularis Vv, quae vocetur* $= v$; *deinde quaeratur inclinatio rectae AZ ad planum aVz, quod ſcilicet tribus punctis a, V, z determinatur, quae inclinatio vocetur* $= \Phi$: *hincqae erit momentum quaeſitum* $= V . v$ ſin. Φ. Scilicet aequabitur producto ex vi ſollicitante V in diſtantiam $Vv = v$, atque inſuper in ſinum anguli inclinationis Φ. Tab. II. Fig. 1.

Ve-

Digitized by Google

Verum ſi pro hac formula tam diſtantiam v quam angulum Φ in genere per calculum definire velimus, in formulas analyticas tantopere intricatas delabimur, vt vix quicquam inde ad vſum mechanicum concludi queat. Cum autem electio puncti V ab arbitrio noſtro pendeat, id ita aſſumere licet, vt pleraeque difficultates memoratae euaneſcant, quod eueniet, ſi punctum V ibi accipiatur, vbi diſtantia inter binas rectas A Z et $a\,z$ (quas ambas in infinitum extendi concipere conuenit) ſit minima. Hanc conditionem igitur introducentes totam momentorum inueſtigationem inſtituamus, et more apud Geometras recepto procedamus; vbi, quae proprie ad Mechanicam ſpectant, ab iis quae ad Geometriam ſunt referenda, diſtinguamus.

Theorema geometricum.

Tab. II. Fig. 2. §. 1. *Si recta M m fuerit minima diſtantia inter binas rectas A Z et a z, ea ad vtramque erit normalis, ita vt tam angulus A M m quam angulus a m M ſit rectus.*

Demonſtratio.

§. 2. Si enim angulus $M m z$ non eſſet rectus, perpendiculum $M p$, ex M in rectam $a\,z$ demiſſum, minus foret quam $M m$, contra hypotheſin. Simili modo, ſi recta $m M$ non eſſet perpendicularis ad A Z, ex m eo duci poſſet perpendicularis $m P$, quae iterum minor foret quam $M m$, contra hypotheſin. Vnde euidens eſt, diſtantiam minimam $M m$ ad vtramque rectam A Z et $a\,z$ eſſe debere perpendicularem.

Corollarium.

§. 3. Quod ſi per m ipſi A Z ducamus parallelam $\alpha\,\omega$, erit etiam $M m$ perpendicularis ad $\alpha\,\omega$ et perpendicularis ad pla-

Digitized by Google

planum $a\,m\,\alpha$ vel $\omega\,m\,z$; ſicque recta $m\,z$ ſita erit in plano ad rectam M m normali, atque ſi angulus $a\,m\,\alpha$, ſiue $z\,m\,\omega$ ponatur $= \omega$, iſte angulus metietur inclinationem mutuam binarum rectarum propoſitarum A Z et $a\,z$.

Problema mechanicum.

§. 4. *Cognita diſtantia minima* $M\,m = m$ *inter directionem vis ſollicitantis* $A\,Z$ *et axem* $a\,z$, *definire momentum vis* V *reſpectu axis* $a\,z$.

Solutio.

§. 5. Punctum V ſupra in regula memoratum ſumamus in recta A Z, in ipſo puncto M, vbi diſtantia ab altera recta $a\,z$, ſcilicet M $m = m$, eſt minima. Per M ducatur recta $\alpha\,\omega$, ipſi $a\,z$ parallela, quae ergo cum $a\,z$ in eodem plano iacebit, atque angulus A M α, ſiue Z M ω, qui ſit $= \omega$, exprimet inclinationem rectae A Z ad planum a M z, quam ſupra in regula indicauimus per Φ, quamobrem momentum quaeſitum nunc erit $=$ V m ſin. ω. Tab. II. Fig. 3.

Corollarium.

§. 6. Ad momentum igitur vis V, in directione A Z vrgentis, reſpectu axis $a\,z$ inueniendum, primo quaeri debet diſtantia minima inter binas rectas A Z et $a\,z$, quam ponimus M $m = m$. Deinde etiam quaeri debet angulus ω, ſiue inclinatio mutua ambarum rectarum A Z et $a\,z$. Quemadmodum igitur vtramque inueſtigationem inſtitui oporteat doceamus, poſtquam oſtenderimus, quomodo poſitionem vtriusque rectae ad calculum reuocari conueniat.

Digitized by Google

Problema geometricum.

§. 7. *Poſitionem ambarum rectarum A Z et a z ad calculum reuocare.*

Solutio.

Tab. II. Fig. 4. §. 8. Hunc in finem in ſubſidium vocemus ternas directiones fixas inter ſe normales, ad quas vtriusque rectae poſitionem per ternas coordinatas, iſtis directionibus parallelas, referamus. Hinc igitur pro recta A Z conſtituamus tres axes A F, A G, A H, directionibus illis fixis parallelos, quorum reſpectu pro puncto quocunque Z ſtatuamus ternas coordinatas iſtis axibus parallelas $AX = X$, $XY = Y$, et $YZ = Z$, et poſito interuallo $AZ = S$, quia ad id ternae coordinatae conſtantes tenent rationes; ponamus $X = FS$, $Y = GS$, $Z = HS$, vbi cum ſit $F = \frac{AX}{AZ}$, euidens eſt F exprimere coſinum anguli F A Z, quo directio A Z ad axem A F inclinatur. Simili modo G erit coſinus anguli, quo directio A Z ad axem A G inclinatur, et H erit coſinus anguli, quo directio A Z ad axem A H inclinatur. Praeterea vero, cum ſit

$$S^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = (F^2 + G^2 + H^2) S^2,$$

euidens eſt ſemper fore $F^2 + G^2 + H^2 = 1$.

§. 9. Eodem modo pro altera directione $a z$ ſtatuantur terni axes af, ag, ah, directionibus fixis paralleli, ad quos poſitio cuiusvis puncti z referatur per coordinatas $ax = x$, $xy = y$, $yz = z$; et poſito interuallo $az = s$, ſtatuatur $x = fs$, $y g = s$ et $z h = s$, vbi, vt ante, litterae f, g, h, exprimunt coſinus angulorum faz, gaz, haz, quibus directio propoſita az ad ternos axes af, ag, ah, inclinatur. Tum vero etiam hic habebitur $f^2 + g^2 + h^2 = 1$.

§. 10.

§. 10. Denique quo etiam ſitus puncti a reſpectu puncti A in calculum inferatur, ex puncto a in planum F A G demittatur perpendiculum a C, tum vero ex puncto C ad axem A F normalis ducatur C B, ac vocentur interualla $AB = a$, $BC = b$, $Ca = c$, ita vt punctum a quoque per ternas coordinatas a, b, c, determinetur, hocque modo omnia, quae ad relationem inter binas rectas propoſitas A Z et $a z$ pertinent, facillime ad calculum reuocari poterunt.

Problema geometricum.

§. 11. *Propoſitis duabus rectis A Z et a z, earum inclinationem mutuam, quae ſit ω, per calculum definire.*

Solutio.

§. 12. Poſtquam ambae rectae propoſitae A Z et $a z$ per ternas coordinatas, vti modo docuimus, ad calculum fuerint reuocatae, quia omnes rectae inter ſe parallelae ad quamuis aliam rectam aequaliter inclinantur, ducamus ex A rectam Az', alteri rectae propoſitae $a z$ parallelam, ſimulque ducantur ternae coordinatae reſpondentes $Ax' = x$, $x'y' = y$, $y'z' = z$. Haec ſcilicet figura, vbicunque extiterit recta $a z$, in hunc locum translata concipiatur, atque iam angulus ZAz' erit inclinatio, quam ambae rectae propoſitae A Z et $a z$ inter ſe tenent. Tab. II. Fig. 5.

§. 13. Quamobrem, quo iſtum angulum ZAz' commodius definire queamus, ambo interualla A Z et az' inter ſe aequalia accipiamus, ita vt ſit $s = S$, vnde ſequentes habebimus valores:

$$AX = X = FS;\ XY = Y = GS;\ YZ = Z = HS;$$

$$Ax' = x = fS;\ x'y' = y = gS;\ y'z' = z = hS$$

ex quibus recta Zz' ita definitur, vt ſit

$$(Zz')^2 = (x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2, \text{ ſiue}$$
$$(Zz')^2 = S\,[(f - F)^2 + (g - G)^2 + (h - H)^2]$$

qua expreſſione euoluta, ob

$$f^2 + g^2 + h^2 = 1 \text{ et } F^2 + G^2 + H^2 = 1, \text{ erit}$$
$$(Zz')^2 = 2\,S^2\,(1 - fF - gG - hH).$$

§. 14. Ex Geometria autem conſtat angulum ZAz' ex datis tribus lateribus ita definiri, vt ſit $\text{coſ.}\,\omega = \frac{AZ^2 + Az'^2 - Zz'^2}{2\,AZ \times Az'}$, vnde, valoribus ſubſtitutis colligitur fore $\text{coſ.}\,\omega = fF + gG + hH$, quae expreſſio ſatis eſt ſimplex, vt in calculum commode introduci queat.

Problema geometricum.

Tab. II. Fig. 4. §. 15. *Propoſitis duabus rectis AZ et az, prouti ante ad calculum ſunt reuocatae, inueſtigare puncta Z et z, quorum diſtantia Zz omnium ſit minima.*

Solutio.

§. 16. Quia diſtantia minima inter binas rectas propoſitas ad vtramque eſt normalis, puncta Z et z inde definiri debebunt, vt anguli AZz et azZ fiant recti, ſiue, ſi ductae intelligantur rectae Az et aZ, vt ſit

$$Az^2 = AZ^2 + Zz^2 \text{ et } aZ^2 = az^2 + Zz^2,$$

quas ergo aequationes ad calculum reduci oportet. Ante omnia autem ex elementis conſtitutis interuallum Zz ita exprimitur, vt ſit

$$Zz^2 = (a + fs - FS)^2 + (b + gs - GS)^2 + (c + hs - HS)^2,$$

quae

quae expreſſio quo magis contrahatur, ponamus br. gr.

$aa+bb+cc=\Delta$; $aF+bG+cH=E$ et $af+bg+ch=e$,

ſicque impetrabimus hanc formam:

$$Zz^2=\Delta+2es-2ES-2Ss(Ff+Gg+Hh)+s^2+S^2.$$

Cum igitur, vt modo ante vidimus, ſit $Ff+Gg+Hh=\text{coſ.}\,\omega$, erit

$$Zz^2=\Delta+2es-2ES-2Ss\,\text{coſ.}\,\omega+s^2+S^2.$$

§. 17. Deinde vero has denominationes in ſubſidium vocando reperietur per noſtras coordinatas

$$Az^2=(a+fs)^2+(b+gs)^2+(c+hs)^2,$$

ideoque erit

$$Az^2=\Delta+2es+ss.$$

Simili modo erit

$$aZ^2=(a-FS)^2+(b-GS)^2+(c-HS)^2,$$

adeoque

$$aZ^2=\Delta-2ES+SS.$$

Hinc igitur binae aequationes ſupra datae dabunt has:

$$\Delta+2es+ss=2S^2+\Delta-2ES+2es-2Ss\,\text{coſ.}\,\omega+s^2$$

$$\Delta-2ES+SS=2ss+\Delta-2ES+2es-2Ss\,\text{coſ.}\,\omega+S^2$$

quae ad has formas reducuntur:

$$S-E-s\,\text{coſ.}\,\omega=0$$

$$s+e-S\,\text{coſ.}\,\omega=0.$$

§. 18. Ex his iam duabus aequationibus ſatis ſimplicibus ambo interualla quaeſita $AZ=S$ et $az=s$, ita determinantur, vt ſit

$$S=\frac{E-e\,\text{coſ.}\,\omega}{\text{ſin.}\,\omega^2} \text{ et } s=\frac{E\,\text{coſ.}\,\omega-e}{\text{ſin.}\,\omega^2}$$

Co-

Corollarium.

§. 18. Quodſi ergo interuallis $AZ = S$ et $az = s$ hi valores tribuantur, tum diſtantia Zz omnium euadet minima, ideoque $= m$, quam ergo ſi in calculo retineamus, binae aequationes principales, vnde haec ſolutio eſt deducta, erunt

$$mm + SS = \Delta + 2es + ss,$$

$$mm + ss = \Delta - 2ES + SS,$$

quae duae aequationes additae producent hanc:

$$mm = \Delta + es - ES,$$

quae multo ſimplicior eſt quam ea quae ante immediate fuerat orta, ſcilicet

$$mm = \Delta + 2es - 2ES - 2Ss \operatorname{coſ.} \omega + ss + SS,$$

ea igitur in ſequente Problemate vtemur.

Problema geometricum.

§. 19. *Propoſitis duabus rectis AZ et az, per elementa ſupra ſtabilita definitis, inuenire earum diſtantiam minimam.*

Solutio.

§. 20. In Problemate praecedente inuenimus, ſi capiatur

$$AZ = S = \frac{E - e \operatorname{coſ.} \omega}{\operatorname{ſin.} \omega^2} \text{ et } az = s = \frac{E \operatorname{coſ.} \omega - e}{\operatorname{ſin.} \omega^2},$$

tum diſtantiam Zz aequari ipſi diſtantiae minimae $= m$. Deinde vero in Corollario oſtendimus eſſe $m^2 = \Delta + es - ES$; quamobrem tantum opus eſt, vt pro litteris Δ, e et E valores aſſumti reſtituantur, qui erant

$$\Delta = aa + bb + cc,$$
$$E = aF + bG + cH$$
$$e = af + bg + ch,$$

vnde

vnde oritur haec aequatio:

$$m^2 \text{ſin.}\omega^2 = (aa+bb+cc)\,\text{ſin.}\,\omega^2 + 2\,(af+bg+ch)(aF+bG+cH)\,\text{coſ.}\omega$$
$$-(af+bg+ch)^2 - (aF+bG+cH)^2.$$

Manifeſtum igitur eſt facta euolutione talem formam eſſe prodituram:

$$mm\,\text{ſin.}\,\omega^2 = aa\mathfrak{A} + bb\mathfrak{B} + cc\mathfrak{C} + 2ab\mathfrak{F} + 2bc\mathfrak{G} + 2ac\mathfrak{H},$$

ſicque tantum opus eſt, vt valores litterarum $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H}$, euoluantur.

§. 21, Incipiamus a littera $\mathfrak{A}$, eiusque valor reperitur

$$\mathfrak{A} = \text{ſin.}\,\omega^2 + 2\,Ff\,\text{coſ.}\,\omega - F^2 - f^2, \text{ ſiue}$$
$$\mathfrak{A} = 1 - F^2 - f^2 + \text{coſ.}\,\omega\,(2\,Ff - \text{coſ.}\,\omega).$$

Hinc iam loco coſ. ω eius valor $Ff + Gg + Hh$ ſubſtituatur, eritque

$$\mathfrak{A} = 1 - F^2 - f^2 + F^2 f^2 - (Gg + Hh)^2,$$

cuius expreſſionis pars prior manifeſto eſt productum ex factoribus $1 - F^2$ et $1 - f^2$; quare cum ſit

$$1 - F^2 = G^2 + H^2 \text{ et } 1 - f^2 = g^2 + h^2,$$

facta euolutione reperitur

$$\mathfrak{A} = GGhh - 2\,GHgh + HHgg = (Gh - Hg)^2.$$

Simili modo valores litterarum $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ inueniri poſſent; ſed quia tam litterae a, b, c, quam F, G, H, item f, g, h, eodem ordine procedunt, tantum opus eſt ſingulas litteras pro $\mathfrak{A}$ inuentas vno gradu promouere, vt obtineatur

$$\mathfrak{B} = (Hf - Fh)^2; \text{ atque } \mathfrak{C} = (Fg - Gf)^2,$$

dum denuo vno gradu progreditur.

§. 22. Quaeramus nunc valorem litterae $\mathfrak{F}$, qui ex forma inuenta colligitur fore

$\mathfrak{F}$

$$\mathfrak{F} = (Fg + Gf)\cos\omega - FG - fg.$$

Hinc ſubſtituto valore pro coſ. ω fiet

$$\mathfrak{F} = (Fg + Gf)(Ff + Gg + Hh) - FG - fg, \text{ ſiue}$$

$$\mathfrak{F} = -FG(1 - ff - gg) - fg(1 - F^2 - G^2) + Hh(Fg + Gf).$$

Quia igitur eſt

$$1 - ff - gg = hh \text{ et } 1 - F^2 - G^2 = H^2, \text{ fiet}$$

$$\mathfrak{F} = Hh(Fg + Gf) - FGhh - fgHH,$$

quod manifeſto eſt productum ex factoribus $Gh - Hg$ et $Hf - Fh$, ita vt ſit

$$\mathfrak{F} = (Gh - Hg)(Hf - Fh).$$

Quod ſi iam vno gradu progrediamur, hinc deducimus valorem

$$\mathfrak{G} = (Hf - Fh)(Fg - Gf)$$

ac denuo progrediendo

$$\mathfrak{H} = (Fg - Gf)(Gh - Hg).$$

§. 23. His igitur colligendis ſequentem aequationem nanciſcemur:

$$\begin{aligned} mm\sin\omega^2 = {} & (Gh - Hg)^2 aa + 2(Gh - Hg)(Hf - Fh)ab \\ & + (Hf - Fh)^2 bb + 2(Hf - Fh)(Fg - Gf)bc \\ & + (Fg - Gf)^2 cc + 2(Fg - Gf)(Gh - Hg)ac \end{aligned}$$

quae expreſſio manifeſto eſt quadratum. Extracta ergo radice orietur:

$$m\sin\omega = (Gh - Hg)a + (Hf - Fh)b + (Fg - Gf)c$$

quae formula etiam negatiue potuiſſet accipi, ſed quia de diſtantia ſermo eſt, ea ſemper poſitiua intelligi ſolet. Quin etiam ſin. ω negatiue ſumi poſſet, quia tantum inclinationis coſinum immediate inuenimus, vnde vna ambiguitas ab altera tolli eſt cenſenda.

Pro-

Digitized by Google

Problema mechanicum.

§. 24. *Propoſita vi quacunque V ſecundum directionem A Z vrgente, definire eius momentum reſpectu axis cuiuscunque a z.*

Solutio.

§. 25. Poſitionem vtriusque directionis AZ et az per eadem elementa exprimi aſſumamus, quae ſupra ſunt ſtabilita, ſcilicet per terna interualla $AB = a$, $BC = b$, $Ca = c$; tum vero per coſinus F, G, H, angulorum, quibus directio AZ ad axes fixos AF, AG, AH, inclinatur, atque inſuper per coſinus f, g, h, angulorum, ſub quibus altera directio az ad axes fixos af, ag, ah, inclinatur; ex quibus elementis colligitur inclinatio mutua ambarum directionum, qua poſita $= \omega$ inuenimus eſſe $\cos. \omega = Ff + Gg + Hh$. Praeterea vero ſi m denotet diſtantiam minimam inter has duas directiones, modo vidimus eſſe:

$$m \sin. \omega = (Gh - Hg)a + (Hf - Fh)b + (Fg - Gf)h.$$

§. 26. Ex his autem duobus valoribus pro angulo ω et diſtantia minima m inuentis ſupra demonſtrauimus §. 5. fore momentum quaeſitum $= V m \sin. \omega$. Quare, ſubſtitutis valoribus modo aſſignatis, momentum quaeſitum hac formula exprimetur:

$$Va(Gh - Hg) + Vb(Hf - Fh) + Vc(Fg - Gf).$$

Corollarium.

§. 27. Expreſſio ergo pro momento inuenta, praeter ipſam vim propoſitam V, inuoluit nouem litteras a, b, c; F, G, H; f, g, h; quae autem ad ſeptem reduci poſſunt, cum ſit $F^2 + G^2 + H^2 = 1$ et $f^2 + g^2 + h^2 = 1$. Quia igitur ob tantam multitudinem rationem iſtius formulae haud facile perſpicere licet, haud abs re erit, quosdam caſus particulares, qui-

 bus

Digitized by Google

bus directio axis $a z$ vel in directionem $a f$, vel $a g$, vel $a b$ incidit, euoluere.

Caſus I. quo directio $a z$ incidit in axem $a f$.

§. 28. Hoc igitur caſu, ob coordinatas $y = 0$ et $z = 0$, erit $g = 0$ et $h = 0$, ideoque $f = 1$; tum igitur fiet cof. $\omega = F$, atque momentum vis propoſitae reſpectu axis $a f$ erit $V(b H - c G)$.

Caſus II. quo directio $a z$ incidit in axem $a g$.

§. 29. Hoc igitur caſu binae coordinatae x et z euaneſcent, eritque ergo $f = 0$ et $h = 0$, ideoque $g = 1$. Inclinatio igitur ad hunc axem determinatur per coſ. $\omega = G$, atque momentum reſpectu axis $a g$ erit $V(c F - a H)$.

Caſus III. quo directio $a z$ incidit in axem $a h$.

§. 30. Hic binae coordinatae x et y euaneſcunt, eritque idcirco $f = 0$ et $g = 0$, tum vero $h = 1$. Inclinationis, ſiue anguli ω, coſinus erit $= H$, et momentum quaeſitum reſpectu axis $a h$ fiet $V(a G - b F)$.

Problema mechanicum.

§. 31. *Cognitis tribus momentis, quae vis propoſita V, in directione A Z agens, exerit in ternos axes fixos $a f$, $a g$, $a h$, inuenire momentum, quod eadem vis reſpectu axis $a z$ producet.*

Solutio.

§. 32. Deſignemus terna momenta cognita per litteras $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, atque habebimus, vt modo inuenimus

$$\mathfrak{P} = V(b H - c G);$$
$$\mathfrak{Q} = V(c F - a H);$$
$$\mathfrak{R} = V(a G - b F).$$

Iam

Iam vero expreſſio pro momento reſpectu axis az ſupra inventa etiam hac forma repraeſentari poteſt:

$$Vf(bH - cG) + Vg(cF - aH) + Vh(aG - bF),$$

vbi eaedem formulae occurrunt, quas modo pro momentis $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ dedimus, quibus ergo ſubſtitutis momentum reſpectu axis az, erit $f\mathfrak{P} + g\mathfrak{Q} + h\mathfrak{R}$, vbi non amplius neque poſitio, neque ipſa vis ſollicitans V in calculum ingreditur, vnde ſequens Theorema maximi momenti nanciſcimur.

Theorema mechanicum.

§. 33. A quibuscunque viribus corpus circa axem az mobile ſollicitetur, ſi earum virium momenta reſpectu axium af, ag, ah fuerint $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, tum momentum reſpectu axis propoſiti az erit $f\mathfrak{P} + g\mathfrak{Q} + h\mathfrak{R}$, vbi f, g, h, denotant coſinus angulorum faz, gaz, haz. Veritas huius Theorematis iam penitus eſt euicta in Problemate praecedente. Hic autem obſeruaſſe iuuabit terna illa momenta $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ $\mathfrak{R}$ in eundem ſenſum tendere debere. Scilicet ſi momentum $\mathfrak{P}$ pro axe af tendat in plagam gh, tum bina reliqua momenta tendere debent in plagas hf et fg, ſiue ſecundum ordinem harum litterarum, in plagam fgh, atque in eandem plagam etiam verget momentum pro axe az inuentum. Ac ſi quodpiam horum momentorum $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, in plagam contrariam vergat, id in calculo negatiue erit accipiendum.

Corollarium 1.

§. 34. Hinc ergo etiam iſta inſignis veritas deducitur: *Quaecunque vires reſpectu ternorum axium af, ag, ah, inter ſe normalium eadem praebent momenta, eaedem pro quouis axe obliquo az paria momenta generabunt.*

Digitized by Google

Corollarium 2.

§. 35. Momenta igitur virium pro ternis axibus inter ſe normalibus eodem prorſus modo componi poſſunt, quo vires ſimplices componi ſolent. Si enim puncto *a* applicatae fuerint vires P, Q, R, ſecundum directiones *af*, *ag*, *ah*, ex iis componitur vis ſecundum directionem $az = fP + gQ + hR$, quae egregia harmonia maxima attentione digna eſt cenſenda, atque in vniuerſam Mechanicam hinc non contemnenda incrementa redundare poſſunt.

ME-

Digitized by Google

METHODVS FACILIS
OMNIVM VIRIVM MOMENTA
RESPECTV AXIS CVIVSCVNQVE
DETERMINANDI.

Auctore

L. E V L E R O.

Conuent. exhib. die 14 *Aug.* 1780.

Solutio Problematis geometrici, quo inter binas rectas non in eodem plano ſitas quaerebatur earum diſtantia minima, deduxit me, per calculos non parum abſtruſos, ad inſigne Theorema mechanicum, quod ita commodiſſime enunciari poteſt: *Propoſitis viribus quibuscunque, ſi inuenta fuerint earum momenta reſpectu trium axium a f, a g, a h, inter ſe normalium, quae ſint* $\mathfrak{P}$ *reſpectu axis a f,* $\mathfrak{Q}$ *reſpectu axis a g et* $\mathfrak{R}$ *reſpectu axis a h; tum ab iisdem viribus, reſpectu axis cuiusuis obliqui a z, per punctum a tranſeuntis, orietur momentum hoc:* Tab. III. Fig. 1.

$$\mathfrak{P}\ \text{coſ.}\ f a z + \mathfrak{Q}\ \text{coſ.}\ g a z + \mathfrak{R}\ \text{coſ.}\ h a z,$$

ſi quidem tria illa momenta, ſecundum eundem ſenſum agant, ſiue in ſenſum f g h ſiue in contrarium f h g. Quae egregia veritas cum ex conſideratione geometrica per calculos ſatis prolixos deriuata ſit, nullum eſt dubium, quin etiam via directa ex principiis ſtaticis deduci queat. Poſtquam igitur hoc argumentum

Digitized by Google

ſollicite eſſem perſcrutatus, incidi in viam ſatis planam, quae me ad hanc veritatem perduxit, et quae ſimul mihi facilem methodum aperuit omnium virium momenta reſpectu axis cuiuscunque determinandi.

Theorema.

Tab. III. Fig. 2. §. 1. *Quaecunque vis fuerit propoſita, ea ſemper in tres alias reſolui poteſt, quarum directiones cadant in plana f a g, g a h, h a f, quae ſcilicet plana per ternos axes a f, a g, a h, inter ſe normales determinantur.*

Demonſtratio.

§. 2. In quacunque directione vis propoſita agat, ea producatur, donec planum *f a g* alicubi in O traiiciat, in quo ergo puncto vis O Z applicata concipi poteſt. Haec igitur vis O Z reſolui poterit in duas, quarum vna cadat in ipſum planum *f a g*, altera vero, quae ſit O *p*, ad hoc planum ſit perpendicularis. Hoc modo iam nacti ſumus vnam vim, cuius directio in planum *fag* cadit; quare oſtendendum eſt, quomodo altera vis O *p*, quae ſit *p*, in duas nouas reſolui poſſit, quarum directiones cadant in plana *f a h* et *g a h*.

§. 3. Ad hoc praeſtandum concipiatur in ipſo puncto *a* ſecundum directionem *a h* applicata vis illi *p* aequalis et parallela, quae quia tranſit per ipſum punctum *a* nullum gignit momentum reſpectu vllius axis per punctum *a* ducti, ideoque in computo momentorum perinde eſt, ſiue haec noua vis adſit, ſiue abſit. Concipiamus igitur hanc nouam vim adeſſe, et ducta recta O *a*, eaque biſecta in D, ſi in hoc puncto D vis ad planum B *a* C perpendicularis et aequalis 2 *p* applicata intelligatur, ea aequiualebit viribus illis *p*, ideoque aequiualebit ipſi

vi

vi O $p = p$, quandoquidem iſta vis pro puncto a idem producit momentum quod ipſa vis O p.

§. 4. Nunc ex puncto O in axes af et ag ducantur perpendicula OB et OC, et ducta inſuper recta BC punctum D in eius medium cadet, vnde loco vis $2p$, puncto D applicatae, ſubſtitui poterunt vires C $q = p$ et B $r = p$, quarum directiones axi ab erunt parallelae, ſicque iſtae duae vires C q et B r ipſi vi O p aequiualentes ſunt cenſendae. Quoniam igitur vis illius C q directio cadit in planum gab, huius vero B r in planum fab, hoc modo vim propoſitam reſoluimus in tres alias, quarum directiones incidunt in plana fag, fab, gab, quae ergo vires eundem praeſtabunt effectum atque ipſa vis propoſita.

Corollarium.

§. 5. Harum virium prima, cuius directio in ipſum planum fag cadit, nullum momentum generat, tam pro axe af quam ag, ſed tota quaſi inſumitur in momento circa axem ab producendo. Simili modo ſecunda vis, cuius directio cadit in planum fab, neque pro axe af, neque pro axe ab nullum momentum generabit, ſed tota impendetur ad momentum circa axem ag producendum. Eodemque modo vis cuius directio in planum gab cadit, circa ſolum axem af momentum generabit.

Problema.

§. 6. *Si ſola adſit vis, cuius directio in planum fag cadet, eiusque momentum reſpectu axis ab fuerit cognitum $= \mathfrak{R}$, eiusdem vis momentum reſpectu axis cuiuscunque obliqui az, pariter per punctum a tranſeuntis, inueſtigare.*

Solu-

Solutio.

Tab. III. Fig. 3.

§. 7. Pro ſitu huius axis az definiendo ponamus coſ. $faz = f$, coſ. $gaz = g$, coſ. $haz = h$, atque euidens eſt fore $ff + gg + hh = 1$. Iam quaecunque ſit vis propoſita, cuius directio in planum fag incidit, eam ſemper reſoluere licet in duas, quarum altera in ipſum axem af incidat, altera vero ad eum ſit normalis, quarum illa in hoc negotio penitus negligi poteſt, hanc vero per rectam xy referre licet, quae ſi ponatur $= v$, eius momentum reſpectu axis ah erit $= v\,ax$, quod cum detur $= \mathfrak{R}$, erit $v \cdot ax = \mathfrak{R}$; et quia hanc vim ſecundum directionem xy vrgere aſſumimus, momentum $\mathfrak{R}$ aget in ſenſum fg, ſiue, ſecundum ordinem litterarum, in ſenſum fgh.

§. 8. Iam vt in huius vis $xy = v$ momentum reſpectu axis az inquiramus, punctum y ibi ſumatur, vbi perpendiculum yz ipſi directioni propoſitae az in z occurrat. Tum vero ducatur etiam recta ay, atque vis illa $xy = v$ reſoluatur ſecundum directiones ya et yt ad eam normali, quarum illa per punctum a tranſiens nihil confert ad momentum quod quaerimus. Quod ſi ergo ponamus angulum $fay = \zeta$, erit vis in directione ty vrgens $= v$ coſ. ζ, quae ſola in axem az agere eſt concipienda. Vt iam huius vis momentum reſpectu axis az indagemus, ex y ad az normaliter ducamus rectam ys, cuius quantitatem definire debemus. Vbi notetur angulum yaz eſſe complementum anguli haz, cuius coſinum poſuimus $= h$, ſicque erit ſin. $yaz = h$, ideoque perpendiculum $ys = ay \cdot h$. Quare cum ſit $ay = \frac{ax}{\text{coſ.}\,\zeta}$, erit $ys = \frac{ax \cdot h}{\text{coſ.}\,\zeta}$.

§. 9. Quia igitur directio vis ſollicitantis $ty = v$ coſ. ζ normalis eſt ad planum yaz, in eoque recta ys normalis ad az, huius vis momentum reſpectu axis az erit $= v\,\text{coſ.}\,\zeta \cdot ys$

$= v . a . x . b$. Quare cum productum $v . a x$ aequetur momento propoſito $\mathfrak{R}$, iſtud momentum reſpectu axis $a z$ erit $\mathfrak{R} b$, quod manifeſto etiam in ſenſum $f g b$ vergit.

Corollarium.

§. 10. Simili modo cum par ſit ratio virium quarum directiones cadunt in plana $f a b$ et $g a b$, non opus eſt totum ratiocinium, quo hic vſi ſumus, ad eas applicare, ſed per ſolam translationem, ſecundum ordinem litterarum f, g, b, procedentem, earum momenta reſpectu axis $a z$ expedite aſſignari poterunt.

Corollarium 2.

§. 11. Quoniam igitur hic a vi cuius directio in planum $f a g$ cadit incepimus, vno gradu progrediendo perueniemus ad planum $g a b$, et vis in hoc plano agens momentum generabit reſpectu axis $a f$, quod ergo ſi ponamus $= \mathfrak{P}$, ex eo reſultabit pro axe $a z$ momentum $= \mathfrak{P} f$. Ac ſi porro vno gradu progrediamur, incidemus in planum $b a f$, et vis in hoc planum agens ſi reſpectu axis $a g$ producat momentum $= \mathfrak{Q}$, ex eo obtinebitur pro axe $a z$ momentum $\mathfrak{Q} g$, hincque iam ſponte fluit demonſtratio Theorematis ſupra initio memorati.

Theorema.

§. 12. *Propoſitis viribus quibuscunque, ſi inuenta fuerint earum momenta, reſpectu trium axium* $a f$, $a g$, $a b$, *inter ſe normalium, quae ſint* $\mathfrak{P}$ *reſpectu axis* $a f$, $\mathfrak{Q}$ *reſpectu axis* $a g$ *et* $\mathfrak{R}$ *reſpectu axis* $a b$; *tum ab iisdem viribus reſpectu axis cuiusuis obliqui* $a z$, *per punctum* a *tranſeuntis, orietur momentum*

$$\mathfrak{P} \text{ coſ. } f a z + \mathfrak{Q} \text{ coſ. } g a z + \mathfrak{R} \text{ coſ. } b a z,$$

ſiue etiam $\mathfrak{P} f + \mathfrak{Q} g + \mathfrak{R} b$.

Digitized by Google

Demonſtratio.

§. 13. Cum omnes vires in ternas alias reſoluere liceat, quarum directiones incidant in plana fag, gah, haf, ex earumque prima naſcatur momentum circa ſolum axem ab, quod ſit $= \mathfrak{R}$; ex ſecunda vero momentum circa ſolum axem af, quod ſit $\mathfrak{P}$; ex tertia vero circa ſolum axem ag, quod ſit $\mathfrak{Q}$; in his tribus momentis totus effectus virium ſollicitantium conſtare eſt cenſendus. Quod ſi iam pro axe propoſito az ſtatuamus

$$\text{coſ.}\, faz = f,\ \text{coſ.}\, gaz = g,\ \text{coſ.}\, haz = h;$$

modo vidimus ex momento $\mathfrak{R}$ oriri pro axe az momentum $\mathfrak{R}h$, tum vero ex momento $\mathfrak{P}$, reſpectu axis az, momentum $\mathfrak{P}f$ et ex momento $\mathfrak{Q}$, reſpectu axis az, momentum $\mathfrak{Q}g$. Ex omnibus ergo tribus momentis $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ iunctim ſumtis, hoc eſt ab actione tota virium ſollicitantium, orietur pro axe az hoc momentum: $\mathfrak{P}f + \mathfrak{Q}g + \mathfrak{R}h$, prorſus vti per ſatis longas ambages ex Problemate geometrico eſt erutum.

Corollarium.

§. 14. Totum ergo negotium huc redit, vt virium, quibus corpus circa axem az mobile ſollicitatur, momenta reſpectu trium axium af, ag, ah, inueſtigentur, quae ſi fuerint $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, atque in eandem plagam, ſiue fgh, ſiue fhg vergant, his inuentis momentum reſpectu axis propoſiti az facillime per formulam inuentam definitur, quae operatio quemadmodum commodiſſime inſtitui queat in ſequente Problemate docebimus.

Problema principale.

§. 15. *Si corpus circa axem a z mobile a vi quacunque* Tab. III.
v, in directione A Z agente, ſollicitetur, eius momentum reſpectu Fig. 4.
axis a z aſſignare.

Solutio.

§. 16. Ante omnia vtraque directio az et AZ cum tribus directionibus fixis et inter ſe normalibus conferatur, quae pro axe propoſito az ſint af, ag, ah, ad quas axis az ita inclinetur, vt ſit

coſ. $faz = f$, coſ. $gaz = g$, coſ. $haz = h$.

Simili modo directio AZ referatur ad ternas directiones fixas AF, AG, AH, quarum reſpectu directio ita determinetur, vt ſit

coſ. $FAZ = F$, coſ. $GAZ = G$, $HAZ = H$.

Tum vero pro ſitu puncti h reſpectu A ex puncto a in planum FAG demittatur perpendiculum aC, atque ex puncto C ad AF perpendiculum CB, vocenturque interualla $AB = a$, $BC = b$, $Ca = c$, quae, vti in figura ſunt repraeſentata, in easdem plagas cum ternis directionibus fixis cadant, ita vt, ſi quodpiam in plagam contrariam vergat, id negatiue capi debeat.

§. 17. His praeparatis vis $AZ = V$ reſoluatur in ternas vires ſecundum directiones fixas, vocenturque hae vires: ſecundum $AF = VF = P$; ſecundum $AG = VG = Q$; ſecundum $AH = VH = R$; et iam quaeramus harum ſingularum virium momenta reſpectu axium af, ag, ah. Ac primo quidem vis P, in directione AF agens, quae ipſi af eſt parallela, eius reſpectu nullum momentum producit; at vero reſpectu axis ah, qui vſque ad C productus intelligatur, mo-

mentum producit $= P . b$, quod momentum manifeſto in plagam F G ſiue $f g$ tendit, ideoque in ſenſum $f g h$.

§. 18. Vt autem pateat, in quemnam ſenſum momenta reliqua tendant, producantur directiones $f a$ et $g a$ in γ et β, vbi perpendiculis ex B et D erectis occurrant, ita vt ſit $a D = b$ et $B \beta = D \gamma = c$. Et nunc clarum erit, vim P in directione B F agentem reſpectu axis $g a \beta$ momentum producere $= P . B \beta = P c$, atque in ſenſum F H ſiue $f h$ dirigi, quae directio cum ſit contraria, eius momentum ſtatui debet $= - P c$, ita vt vis iſta P duo momenta producat, alterum pro axe $a h = P b$, alterum pro axe $a g = - P c$.

§. 19. Secunda vis Q in directione A G agens, quia axi $a g$ eſt parallela, eius reſpectu nullum momentum producet; at vero reſpectu axis $a h$ vel $C h$ momentum producet $Q a$, quod tendit in ſenſum G F vel $g f$, contrarium directioni F G H, ideoque ſtatui debebit $= - Q a$. Tum vero eadem vis Q, reſpectu axis $f a$, ſiue $f \gamma$, momentum producet $Q c$, atque in ipſum ſenſum G H, ideoque ſtatuendum $+ Q c$, ſicque ex hac vi Q naſcuntur duo momenta, alterum pro axe $a f = Q c$, alterum pro axe $a h = - Q a$.

§. 20. Denique vis R', in directione A H agens, reſpectu axis $a h$ nullum momentum producit; at vero reſpectu axis $f a$ ſeu $f \gamma$ producet momentum $R b$, et quidem in ſenſum contrarium, ideoque negatiue capiendum. At vero reſpectu axis $a g$, ſiue βg, momentum poſitiuum generatur $R \cdot a$.

§. 21. Quodſi iam momenta pro axibus $a f$, $a g$, $a h$, indicemus vt ſupra per litteras 𝔓, 𝔔, 𝔑, ſi momenta inuenta colli-

Digitized by Google

colligamus, habebimus

$$\mathfrak{P} = \mathrm{Q}\,c - \mathrm{R}\,b;\ \mathfrak{Q} = \mathrm{R}\,a - \mathrm{P}\,c;\ \mathfrak{R} = \mathrm{P}\,b - \mathrm{Q}\,a.$$

Quare cum ſit $\mathrm{P} = \mathrm{V\,F}$, $\mathrm{Q} = \mathrm{V\,G}$, $\mathrm{R} = \mathrm{V\,H}$, haec momenta erunt

$$\mathfrak{P} = \mathrm{V}(\mathrm{G}\,c - \mathrm{H}\,b);$$
$$\mathfrak{Q} = \mathrm{V}(\mathrm{H}\,a - \mathrm{F}\,c);$$
$$\mathfrak{R} = \mathrm{V}(\mathrm{F}\,b - \mathrm{G}\,a).$$

§. 22. Deſignemus nunc momentum quaeſitum pro axe propoſito $a\,z = \mathfrak{M}$, atque per Theorema ante demonſtratum patet ſore

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{P}\,f + \mathfrak{Q}\,g + \mathfrak{R}\,h.$$

Subſtitutis ergo valoribus modo inuentis erit momentum quaeſitum (partibus ſormulae ſecundum interualla a, b, c, diſpoſitis)

$$\mathfrak{M} = \mathrm{V}\,a(\mathrm{H}\,g - \mathrm{G}\,h) + \mathrm{V}\,b(\mathrm{F}\,h - \mathrm{H}\,f) + \mathrm{V}\,c(\mathrm{G}\,f - \mathrm{F}\,g),$$

quod momentum in ſenſum F G H tendit. Haecque expreſſio egregie conuenit cum forma, quam in praecedente diſſertatione ex principiis geometricis deriuauimus.

Scholion.

§. 23. Demonſtratio primi Theorematis elegantius adornari poteſt, ita vt non opus ſit nouam vim extraneam, in ipſo puncto a applicandam, in ſubſidium vocare. Scilicet poſtquam directio vis ſollicitantis fuerit per planum $f\,a\,g$ continuata, quod in puncto o ſecet, vbi applicata intelligatur, atque in duas vires fuerit reſoluta, quarum altera in ipſum planum $f\,a\,g$ incidat, altera vero $o\,p$ ei ſit normalis; per punctum o pro lubitu agatur recta $m\,n$ axibus $a\,f$ et $a\,g$ occurrens in punctis Tab. III. Fig. 5.

 m

Digitized by Google

m et n, vnde binas vires mq et nr, ipſi op parallelas conſtituere licet, quae ipſi aequiualeant, quod fit ſi iſtae vires ita capiantur:

$$mq = \frac{on \cdot op}{mn} \text{ et } nr = \frac{om \cdot op}{mn}.$$

Hoc enim modo harum virium ſumma erit $mq + nr = op$, earumque momenta reſpectu o inter ſe fient aequalia $= om \cdot on \cdot op$, vti natura rei poſtulat. Sicque loco vis op nunc nacti ſumus duas vires mq et nr, quarum illa ſita eſt in plano fah, haec vero in plano gah; vnde clarius patet, omnes vires ſemper reſolui poſſe in tres alias, quarum directiones in ipſa plana fag, gah, haf cadant.

ANALY-

Digitized by Google

ANALYSE DES EXPÉRIENCES FAITES EN RUSSIE SUR LA LONGUEUR DU PENDULE À SECONDES, OU LE RAPPORT DE LA PÉSANTEUR EN DIFFÉRENTES LATITUDES.

Par M. KRAFFT.

Préſenté à l'Académie le 25 Octobr. 1790.

Les expériences ſur la longueur du Pendule à ſecondes en différentes latitudes, fourniſſent, pour le rapport de la péſanteur ſous les différens Paralleles, pour la détermination de la figure de la Terre et pour celle de la quantité de ſon applatiſſement, des réſultats ſi importants, qu'il n'en eſt aucune qui faite avec l'exactitude néceſſaire ne ſoit en droit d'intéreſſer les Aſtronomes & les Géographes Mathématiciens. Des expériences ſemblables ont été faites, par les ſoins de l'Académie, il y a longtems, auſſi en pluſieurs endroits de la Ruſſie; les noms des obſervateurs & la bonté de leurs inſtrumens ſont foi de la confiance qu'elles méritent, & la diſtance aſſes grande des Paralleles ſous lesquels quelques unes en

ont

ont été faites avec les mêmes inſtrumens, ne peut qu'ajoûter à leur importance. Je me propoſe dans ce Mémoire, de rapprocher ces expériences, éparſes dans pluſieurs Volumes des Commentaires de l'Académie, d'en faire le calcul & de tirèr de chacune ainſi que de leur enſemble, les concluſions qu'elles ſont capables de fournir.

Les Inſtrumens avec lesquels ces expériences ont été faites, ſont les ſuivans :

A) Un Pendule à verge de metal d'une longueur invariable, que M. de la Condamine avoit fait conſtruire à Paris. Ce Pendule étoit adapté à un mouvement ſemblable à celui d'une montre, qui entretenu par un poids faiſoit aller des aiguilles pour marquer ſur un cadran le nombre des vibrations du Pendule. D'après les expériences faites à Paris par M. de la Caille, comme il le dit dans une lettre à Mr. Griſchow, ce Pendule y faiſoit 98908 oſcillations dans la durée d'un jour ſolaire moyen, & à $6^\circ\frac{1}{2}$ de chaleur du thermomêtre de Réaumur.

B) Un Pendule ſimple, à fil de Pite tres-fin, chargé d'un petit poids doublement conique, & une régle de fer faite exprès pour donner au Pendule toujours la même longueur. Cet appareil a été envoyé à l'Académie par M. de la Caille, qui s'en étoit ſervi à Paris & au Cap de Bonne-éſperance. Selon les expériences de M. de la Caille ce Pendule a fait à Paris 86454 oſcillations dans la durée d'un jour ſolaire moyen & à 12° de chaleur (Memoires de Paris 1754. p. 56).

C)

C) Un Pendule à verge de metal de longueur invariable, le même avec le quel M. de la Condamine a fait un grand nombre d'expériences en pluſieurs endroits de l'Amérique méridionale. Ce Pendule a fait à Paris 98891 oſcillations en un jour ſolaire moyen & à 15° de chaleur. C'eſt ce même Pendule auſſi, dont ſe ſont ſervis Mr. La Caille en Afrique, & Mr. Dagelet l'Aſtronome de Mr. de la Peyrouſe, ſur les vaiſſeaux la Bouſſole & l'Aſtrolabe.

D) Une horloge aſtronomique, au Pendule de la quelle on avoit conſervé une même longueur, en la transportant de Paris à St. Petersbourg. A Paris & à $13°\frac{1}{2}$ de chaleur, elle a accéleré ſur le jour ſolaire moyen de 9 ſecondes.

E) Une horloge aſtronomique, au Pendule de la quelle on avoit conſervé une même longueur pendant le tranſport de Kola à Archangel. A Kola & à 11° de chaleur, elle a retardé dans la durée du jour ſolaire moyen de 10 ſecondes.

Les réſultats immédiats des expériences faites avec ces Pendules (*) ſont préſentes dans la Table ſuivante:

Nombres

(*) Voyéz Nov. Comment. Acad. Petrop. T. VII. Relatio obſervationum et experimentorum, quorum inſtituendorum iter anno 1757 in Inſulam Oeſiliam ſuſceptum occaſionem praebuit, auctore Griſchow.

Nombres d'oſcillations que les Pendules ont faites dans la durée d'un jour ſolaire moyen.

Thermometre de Réaumur.	Pend. invar. A + 6°, 5	Pend. ſinple B + 12°, 0	Pend. invar. C + 15°, 0	Hor. aſtr. D + 13°, 5	Hor. aſtr. + 11°,
Paris (a)	98908,0	86454,0	98891,0	86409,0	
Selenginsk (b)	98909,0	86466,7			
Arensbourg (c)	98944,0	86506,2			
Pernau (d)	98947,9	86510,6			
Dorpat (e)	98948,6	86512,4			
Reval (f)	98949,4	86511,1			
Petersbourg (g)	98957,3	86521,0	98941,0	86470,7	
Archangel (h)					86371,
Ponoi (i)			98964,0		
Kola (k)	98996 5	86546,0			86[illegible]90,

Le

(a) Nov. Comment. T. VII. p. 514 & 519. Quant au Pendule C, voyés Nov. Comment. T. XIV. Partie 2de p. 25. Quant à l'horloge aſtronomique D, j'ai réduit le nombre de ſes oſcillations, faites dans une révolution des fixes, à celui qui repond à 24 heures du tems moyen.

(b) Nov. Comment. T. XI. p. 474. Quant au Pendule ſimple B, les quatre expériences allegueés dans l'endroit cité s'accordent parfaitement à indiquer, que la différence d'un degré dans la température, en produit une de 0, 6 dans le nombre d'oſcillations de ce Pendule en 24 heures du temps moyen. Or le nombre d'oſcillations ayant été de 86461,6 pour 15°, on le trouve de 86466,7 pour 6°, 5.

(c) Nov. Comment. T. VII. p. 465 & 490. Quant au Pendule A; il a fait en 24 heures du temps moyen 98936,0; 98944,0 & 98957,0 oſcillations á + 13°, 5; + 6°, 5 & − 6°, 0 de température. Donc la variation d'un degré dans la température, en produit une de 1,14; 1,08 & 1,04, ou en prenant le milieu, de 1,08 dans le nombre d'oſcillations de ce Pendule en un jour ſolaire moyen.

Digitized by Google

Le rapport des quarrés des nombres d'oſcillations qu'un Pendule de même longueur a faites en tems égaux & à la même température en différens endroits. donne le rapport des gravités dont il y étoit ſollicité, & comme les longueurs des Pendules iſochrones ſont en raiſon de ces gravités; il eſt aiſé de calculer par la Table précédente le rapport de la longueur d'un Pendule ſimple à ſecondes pour un endroit quelconque de ces expériences, à la longueur d'un Pendule iſochrone pour un autre choiſi comme terme de comparaiſon, la température étant ſuppoſée la même. Poſant donc la longueur du Pendule à ſecondes pour Paris $= \pi$; on obtient les réſultats préſentés dans la Table ſuivante:

Pareillement le Pendule ſimple B y a fait dans le même intervalle de temps 86504,4; 86509,8; & 86514,6 oſcillations à $+14°,5$; $+7°,0$ & $+2°,0$ de température; ce qui donne 0,72; 0,96; & 0,81, ou en prenant le milieu, 0,83 pour la différence dans le nombre d'oſcillations due à la variation d'un degré dans la température; cette différenee a été trouvée cy deſſus (remarque b) de 0,60; on peut donc ſans aucune erreur ſenſible, la fixer à 0,7. C'eſt de ces nombres que je me ſuis ſervi dans la réduction des expériences à une même température; ſavoir de 1,08 pour le Pendule A, & de 0,7 pour le Pendule B.

(d) Nov. Comment. T. VII. p. 466 & 490.

(e) Ibid. p. 468 & 495.

(f) Ibid. p. 451 & 480.

(g) Ibid. p. 449 & 475. T. XIV. Partie 2de p. 28 & T. VII. p. 519.

(h) Ibid. T. XVI. p. 583.

(i) Ibid. T. XIV. Partie 2de p. 31.

(k) Ibid. T. XVI. p. 573, 581 & 583.

Digitized by Google

Longueurs du Pendule à ſecondes telles qu'on les trouve par des expériences

	Latit. bor.	faites avec les Pendules à verge de metal.	à fil très-fin	Lieu et date de l'obſerv.		Aſtronomes.
I.	51° 6′. 1.	1,000020. π.	1,000294. π.	Selenginsk.	1761.	Roumovſkj
II.	58° 15′. 0.	1,000730. π.	1,001208. π.	Arensbourg.	1757.	Griſchow.
III.	58° 22′. 7.	1,000806. π.	1,001310. π.	Pernau.	----	-----
IV.	58° 23′. 0.	1,000820. π.	1,001352. π.	Dorpat.	----	-----
V.	59° 26′. 4.	1,000837. π.	1,001326. π.	Reval.	----	-----
VI.	59° 56′. 4.	1,000997. π.	1,001553. π.	Pétersbourg.	1757.	-----
VII.		1,001012. π.		-------	1769.	Mallet.
VIII.		1,001430. π.		-------	1749.	Griſchow.
IX.	64° 33′. 6.	1,001350. π.		Archangel. (1)	1769.	Roumovſk
X.	67° 4′. 5.	1,001476. π.		Ponoi.	1769.	Mallet.
XI.	68° 52′. 5.	1,001790. π.	1,002153. π.	Kola.	1769.	Roumovſ

On remarque ici d'abord, que les longueurs du Pendule à ſecondes déduites des expériences du Pendule a fil, ſont ſenſiblement plus fortes que celles qu'on trouve par des expériences du Pendule à verge de metal. Ces différences étant toujours en même ſens; elles ſemblent tenir à quelque point de la théorie dont on n'a peut-être pas encore tenu compte dans ces ſortes d'expériences.

Soit ſous la latitude $= \lambda$ la longueur du Pendule à ſecondes $= x$, & la latitude de Paris $= L = 48° 50'. 2$. Les accroiſſemens de la longueur du Pendule depuis l'Equateur vers

(1) Comme dans la Table précédente il n'y a point d'expérience faite à Paris & correſpondante à celle d'Archangel; j'ai exprimé le Pendule d'Archangel d'abord par celui de Kola, & enſuite par celui de Paris.

Digitized by Google

vers le Pôle étant ſuppoſés proportionels aux quarrés des ſinus des latitudes, on obtient d'abord

$$x - \pi = n[\text{ſin.}\,\lambda^2 - \text{ſin.}\,L^2] = n\,.\,\text{ſin.}\,(\lambda + L)\,.\,(\lambda - L)$$

où le nombre n eſt le cöefficient conſtant qui change la proportionalité en égalité & qui doit être déterminé par des expériences. Soit pour cet effet $n = \alpha\,.\,\pi$, & l'equation

$$\frac{x - \pi}{\pi} = \alpha\,.\,\text{ſin.}\,(\lambda + L)\,.\,\text{ſin.}\,(\lambda - L)$$

appliquée aux expériences précédentes donne les réſultats ſuivans :

Valeurs de α.

	Pend. à verge	Pend. à fil
I.	0, 0005130.	0, 0075412.
II.	0, 0046694.	0, 0077269.
III.	0, 0050917.	0, 0082756.
IV.	0, 0052673.	0, 0086847.
V.	0, 0047904.	0, 0075891.
VI.	0, 0054687.	0, 0085175.
VII.	0, 0055504.	
VIII.	0, 0078429.	
IX.	0, 0054280.	
X.	0, 0052432.	
XI.	0, 0059008.	0, 0070975.

Prenant le milieu de toutes les valeurs que donne le Pendule à verge de metal, on a - - - - - $\alpha = 0{,}0050696.$

Ou bien, en excluant la 1re & la 8me, $\alpha = 0{,}0052677.$

De même prenant le milieu de celles que donne le Pendule à fil, on a - $\alpha = 0{,}0079189.$

Voyons d'abord, quelle eſt de ces deux valeurs celle qui doit être adoptée préférablement.

Poſant la longueur du Pendule à ſecondes ſous l'Equateur $= p$; l'équation précédente, pour le cas $\lambda = 0$, donne l'allongement du Pendule depuis l'Equateur jusqu'à Paris

$$\pi - p = \alpha \pi \text{ſin.} L^2 = 0,56677.\alpha\pi.$$

Or la longuéur du Pendule équinoxial déterminée avec tant de ſoin par les Académiciens françois doit, ſans doute, autant approcher de la véritable, qu'il eſt permis de l'éſperer dans ce genre de recherches; toute réduction faite au Niveau de la mer & à 10° de chaleur, elle doit être fixée à 439, 178 lignes du pied françois (m). Mr. la Lande, dans les Mémoires de l'Académie de Paris pour l'année 1785 a fait de nouvelles recherches ſur la véritable longueur du Pendule de Paris; il la

(m) M. Bougueur dit dans ſon ouvrage ſur la figure de la Terre p. 338 que la longueur du Pendule équinoxial telle qu'elle réſulte immédiatement de l'expérience faite au niveau de la mer, eſt de 439, 07 lignes & que le thermomètre de Reaumur ſe maintient à Quito à 14 ou 15 dedrés pendant toute l'annéc. (Pag. 33 du diſcours qui ſe trouve à la tête de cet ouvrage). Au niveau de la mer la chaleur étoit plus forte qu'à Quito, & une régle de fer acquérroit 0, 15 lignes de nouvelle extenſion ſur 6 pieds de longueur, lorſqu'on la tranſportoit de Quito au bord de la mer. Donc la régle de fer, qui étant à la température du niveau de la mer, indiquoit 439, 07 lign. pour la longueur du Pendule équinoxial, en auroit indiqué 439, 148 lignes, ſi elle avoit été à la température de Quito c'eſt à dire à $14^\circ\frac{1}{2}$; donc la longueur du Pendule équinoxial au niveau de la mer & à la température de $14^\circ\frac{1}{2}$ eſt de 439, 148 lign. Or M. Bougueur dit pag. 339, que $\frac{2}{100}$ de ligne répondoient ſur la longueur du Pendule à 3 degrés du thermomêtre; donc il faut y ajoûter encore 0, 03 lignes, ce qui donne 449, 178 lignes pour la longueur du Pendule équinoxial au niveau de la mer & à 10° de température.

la fixe de pluſieures manieres à 440, 53 lignes, à la même température; de façon que $\pi - p = 1,352$. lign. Or la premiére des deux valeurs de α que nous venons de trouver, donne pour ce même allongement 1,315, & la ſeconde 1,977. lignes. Ces deux quantités différent entre elles de $\frac{7}{10}$ d'une ligne; mais la premiére ne differe que de $\frac{4}{100}$ de celle qui doit être regardée comme la plus approchante de la vérité, au lieu que la ſeconde s'en éloigne de plus de $\frac{6}{10}$. Il ſemble donc, que la valeur de α tirée du Pendule à fil ne s'accorde nullement avec deux expériences dont l'autenticité eſt généralement reconnue. Adoptant donc la valeur de α telle que la donnent les expériences des Pendules à verge de metal, on a

$$x = \pi [1 + 0,0052677 \text{ ſin.} (\lambda + L) \text{ ſin.} (\lambda - L)]$$

& puisque

$$\pi (1 - 0,0052677. \text{ ſin.} L^2) = p = 439,178. \text{ lignes};$$

& $\pi = 440,53$ lignes; on obtient la longueur du Pendule à ſecondes ſous une latitude quelconque $= \lambda$ & à 10° du thermomêtre de Réaumur, telle qu'elle réſulte des expériences faites en Ruſſie

$$x = [439,178 + 2,321. \text{ ſin.} \lambda^2] \text{ lignes du pied françois.}$$

Cette expreſſion, qui jusqu'à quelques centiémes de ligne près repréſente toutes les expériences du Pendule faites en Ruſſie, s'accorde auſſi parfaitement avec deux autres que Mr. La Lande, dans le Mémoire cité, regarde comme les plus exactes 1°.) celle de Graham, par la quelle on trouve à 10° de température la longueur du Pendule à Londres de 440, 58 lignes de France & 2°.) celle, qu'à faite Mr. Lyons ſous la latitude boréale de 79°. 50′, la plus forte, ou l'on ait jamais obſervé le Pendule, & qui en donne pour cette latitude la longueur de 441, 38 lign. Or l'expreſſion précédente donne l'allon-

l'allongement du Pendule depuis l'Equateur jusqu'à Londres de 1, 42. lignes, & jusqu'à la latitude de l'obſervation de Mr. Lyons de 2, 25 lignes, & conſéquemment les longueurs des deux Pendules de 440, 59 lign. & de 441, 42 lign. de ſorte, que les réſultats de la formule ne s'éloignent de ceux des obſervations, que d'un centiéme de ligne pour Londre & de quatre centiémes pour celle de Mr. Lyons.

L'expreſſion générale, que nous venons de trouver, de la longueur du Pendule à ſecondes ſous une latitude quelconque $= \lambda$, nous donne auſſi à connôitre l'augmentation de la péſanteur depuis l'Equateur juſqu'au Parallele de la même latitude; car ſoit la péſanteur équatorienne $= g$, la péſanteur polaire $=$ G & y égal à celle qui a lieu ſous la latitude $= \lambda$; comme les péſanteurs ſont proportionelles aux longueurs des Pendules iſochrones, on a

$$Y = g\left(1 + \frac{2,321}{439,178} . \text{ſin. } \lambda^2\right) = g\,(1 + 0,0052848.\ \text{ſin. } \lambda^2)$$

&, en faiſant $\lambda = 90°$, $G = 1,0052848.\ g$.

Il eſt connu, que pour l'équilibre d'un Ellipſoide homogéne de révolution la péſanteur en un point quelconque de la ſurface doit être en raiſon de la normale au même point. Soit donc le rayon de l'Equateur $=$ A; le demi-axe de la Terre $=$ B; la péſanteur ſous la latitude λ, $= y$, & celle ſous la latitude L, $=$ Z; & ſoit pour abréger, $\frac{A^2 - B^2}{B^2} = K^2$; on aura par la théorie de l'Ellipſe $y = Z\sqrt{\frac{1 + K^2 . \text{coſ. } L^2}{1 + K^2 . \text{coſ. } \lambda^2}}$. Appliquant cette formule aux péſanteurs ſous l'Equateur & ſous le Pôle, on a $Z = g$ pour le cas $L = 0$, & $y = G$ pour le cas $\lambda = 90°$; ce qui donne $G = g . \sqrt{(1 + K^2)}$ & conſéquemment $1,0052848 = \sqrt{(1 + K^2)} = \frac{A}{B}$; de façon que l'enſemble de toutes les expériences rapportées cy-deſſus donne, dans

dans la ſuppoſition de la Terre elliptique homogéne, le rapport des deux axes

$$B : A = 1 : 1,0052848 = 230 : 231,21.$$

& l'applatiſſement de la Terrre $= \frac{A-B}{B} = \frac{1}{190}$.

Pour appliquer la même formule à chacune de ces expériences àpart, & les péſanteurs étant proportionelles aux longueurs des Pendules iſochrones, on a $y : Z = x : \pi$ pour le cas $L = 48° 50'. 2$; & conſéquemment $x = \pi . \sqrt{\frac{1 + 0,566862 . K^2}{1 + K^2 . coſ. \lambda^2}}$ d'où, en faiſant $x = m . \pi$, on tire $K^2 = \frac{m^2 - 1}{0,566862 - m^2 . coſ. \lambda^2}$. Puisque donc la quantité m eſt donnée immédiatement par les expériences précédentes, avec la latitude correſpondante λ; chacune de ces expériences peut être employée pour déterminer le rapport des axes; ce calcul m'a donné les réſultats ſuivans :

Par l'expér. de		B : A
I.	Selenginsk	230 : 230, 12
II.	Arensbourg	: 231, 07
III.	Pernau	: 231, 17
IV.	Dorpat	: 231, 19
V.	Reval	: 231, 10
VI.	St. Petersbourg	: 231, 25
VII.	- - - - - - -	: 231, 27
VIII.	- - - - - - -	: 231, 80
IX.	Archangel	: 231, 25
X.	Ponoi	: 231, 20
XI.	Kola	: 231, 36

En prenant le milieu de tous
ces rapports on a - $B : A = 230 : 231, 16.$

Ou bien en excluant la 1re & la 8me expérience - - - - - B : A = 230 : 231, 21

& ce dernier rapport s'accorde parfaitement avec celui que nous avons trouvé par le rapport de la péſanteur ſous l'Equateur à celle ſous le Pôle; il donc l'applatiſſement $= \frac{1}{130}$.

Or on ſait, que dans la ſuppoſition de la Terre elliptique homogéne ce rapport doit être néceſſairement celui de 230 : 231, & l'applatiſſement $\frac{1}{230}$, de façon, qu'il faut renoncer ou à la figure elliptique de la Terre, ou bien à l'hypothéſe de la denſité uniforme de ſes couches interieures.

Appliquons donc aux expériences précédentes le théoreme de Mr. Clairaut, du quel auſſi Mr. La Lande, dans le Mémoire cité, ſe ſert pour calculer l'applatiſſement de la Terre. En vertu de ce théoreme il y a, dans toutes les hypothéſes les plus vrai-ſemblables qu'on puiſſe faire ſur la denſité des parties interieures de la Terre, entre l'applatiſſement de la Terre heterogéne & l'augmentation totale de la péſanteur de l'Equateur au Pôle, une liaiſon telle que la ſomme de ces deux quantités égale le double applatiſſement de la Terre homogéne, qui eſt néceſſairement $\frac{1}{130}$; de façon, qu'on a $\frac{A-B}{B} + \frac{G-g}{g} = \frac{1}{115} = 0,0086956$. Or nous avons trouvé cy-deſſûs $\frac{G-g}{g} = 0,0052848$; d'où l'on trouve l'applatiſſement de la Terre heterogéne $\frac{A-B}{B} = 0,0034108 = \frac{1}{293}$.

Ce réſultat s'accorde très bien avec celui, qu'on trouve par un théoreme qu'a démontré Mr. de la Place dans les Mémoires de l'Acad. de Paris pour 1783, en vertu du quel le rapport de l'augmentation totale de la péſanteur à la péſan-

Digitized by Google

péſanteur moyenne, ajouté à l'ellipticité de la Terre, eſt égal à cinq fois la moitié du rapport de la force centrifuge à la péſanteur ſous l'Equateur, rapport qui, comme l'on ſait, eſt $\frac{1}{289}$. Or les expériences précédentes nous donnent

$$G - g = 0,0052848 . g \text{ et } \frac{G+g}{2} = 1,0026424 . g$$

de façon, qu'on a

$$0,0052708 + \frac{A-B}{B} = 0,0086505 ;$$

d'où l'on trouve l'applatiſſement de la Terre

$$\frac{A-B}{B} = 0,0033797 = \frac{1}{297} .$$

Or tel eſt auſſi préciſément l'applatiſſement qui réſulte de la meſure des degrés terreſtres; par celle des 6 degrés qui s'accordent le mieux le Pére Boscovich le fixe à $\frac{1}{297}$.

Les concluſions que les expériences du Pendule faites en Ruſſie m'ont fournies, contribuent donc à confirmer la remarque de Mr. La Lande dans l'endroit cité, que, quand on renonce à l'homogénéité de la Terre, la théorie, les expériences du Pendule & la meſure des degrés terreſtres, entre les réſultats des quelles on a toujours trouvé de ſenſibles différences, s'accordent à indiquer pour la Terre le même applatiſſement.

Je finis ce Mémoire par l'expoſé des longueurs abſolues du Pendule à ſecondes pour les endroits des expériences, avec les réſultats de la formule qui a ſervi de baſe à ces recherches:

 Lon-

Longueurs du Pendule à ſecondes en lignes du pied françois.

à	Latit. bor.	Par. l'obſerv.	Par le calc.	Difference.
Selenginsk.	51° 6′. 1.	440, 540.	440, 575.	+ 0, 035.
Arensbourg.	58° 15′. 0.	440, 852.	440, 847.	— 0, 005.
Pernau.	58° 22′. 7.	440, 885.	440, 852.	— 0, 033.
Dorpat.	58° 23′. 0.	440, 892.	440, 852.	— 0, 040.
Reval.	59° 26′. 4.	440, 899.	440, 890.	— 0, 009.
Petersbourg.	59° 56′. 4.	440, 972.	440, 908.	— 0, 064.
Archangel.	64° 33′. 6.	441, 125.	441, 052.	— 0, 073.
Ponoi.	67° 4′. 5.	441, 180.	441, 148.	— 0, 032.
Kola.	68° 52′. 5.	441, 319.	441, 234.	+ 0, 085.

DE

Digitized by Google

DE MOTV CONI DVPLICIS IN ALTVM SPONTE ASCENDENTIS.

Auctore
A. KONONOFF.

Conuent. exhib. d. 13 *Ian.* 1791.

§. 1.

Conum duplicem ex duobus conis rectis, quorum baſes coniunctae ſunt, compoſitum, atque duobus planis angulum formantibus et leniter in altum aſcendentibus, impoſitum, ſua ſponte aſcendere omnibus iam notum eſt. Motus huiusmodi coni, a multis Phyſicorum iam exploratus, a nemine, quantum ſcio, ad amuſſim determinatus eſt. Et ipſe Celeb. Georg. Wolffgang. Krafft, vir de republica litteraria bene meritus, in diſſertatione ſua tomo ſexto nouorum Commentariorum Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae ſub titulo: *Explicatio experimenti paradoxi de aſcenſu coni duplicis in altum ſpontaneo* inſerta, neque de viribus conum ad aſcendendum ſollicitantibus, neque de duplici eius motu ſatis accurate commemorat, ſed omnis eius opera eo tendit, vt oſtendat, aſcenſum huius coni eſſe apparentem, atque centrum eius

 gra-

grauitatis inter aſcendendum reuera deſcendere ſeu continio propius ad horizontem accedere. Cum autem plena huius motus cognitio non niſi per determinationem virium ſollicitantium earumque effectus comparari queat, operae pretium eſſe arbitror, vt tam has vires, quam motum coni progreſſivum ac gyratorium determinem.

Tab. IV. §. 2. Sit itaque A D B E (fig. 1.) ſectio coni duplicis, ex duobus conis rectis et aequalibus A D B et A E B compoſiti, quae per axin eius D E tranſit. Ponamus porro huiusmodi conum eſſe homogeneum, et hinc eius centrum grauitatis in centro C, baſis communis conorum A D B et A E B ſitum. Sint quoque *b a c* et *c a ∂* (fig. 2.) duo illa plana inclinata, inter ſe aequalia, quibus duplex conus imponitur. Angulus *b a c*, quem longitudines horum planorum, *a c* et *b c*, inter ſe conſtituunt, ſit $= 2\eta$; ita vt dimidium eius, id eſt angulus *b a f*, ſeu *c a f* intra *b a*, ſeu *c a* et perpendiculum ex *a* in *c b* demiſſum comprehenſus, ſit $= \eta$. Angulus inclinationis planorum ad horizontem dicatur Φ.

§. 3. Quando conus duplex planis inclinatis *b a c* et *c a ∂* ſuperimponitur, tunc vnusquisque conorum A D B et A E B (fig. 1.), prout omne corpus tornatum, tangit planum inclinatum, cui incumbit, in vnico modo puncto, ita vt longitudines planorum *a c* et *b c* ſint tangentes earum curuarum, quae orientur ex ſectionibus conorum, factis per plana verticalia, per ipſas longitudines tranſeuntia. Verum cum ſemiapertura planorum *b a c* et *c a ∂*, id eſt angulus η, minor ſit angulo, quem latera conorum A D B et A E B cum radio C B eformant, id eſt minor angulo D B E, ſeu E B C; et cum porro duplex conus illis planis ita ſuperimponi ſoleat, vt eius centrum grauita-

-vitatis C reperiatur in plano verticali per af tranſeunte; hinc, ex ſectionibus conicis neceſſario ſequitur, memoratas curvas eſſe Ellipſes, in vtroque cono aequales, atque adeo longitudines planorum eſſe tangentes Ellipſium. Itaque, ſumto C in figura 3. pro centro grauitatis coni duplicis, in diſtantia perpendiculari CN a linea af ſito, F vero pro eo axis coni puncto, quod verſatur in plano verticali per ac tranſeunte, ponamus HLMN eſſe eam Ellipſin, ex interſectione coni cum plano verticali, per ac ducto, oriundam, quam linea ac, in hoc coni ſitu, tangit. Huius Ellipſis centrum ſit K, axis maior HM, dimidium vero minoris axis KL. HM eſt cum ac parallela, KL vero ad ac perpendicularis et tranſit per punctum contactus coni ad planum ac, atque aequalis eſt lineae CN, ac FG ex puncto F in ac perpendiculariter demiſſae.

Cum angulus caf ſit $= \eta$, erit

$$HM = \frac{2\,DC \cdot CB\,(DC - FC)\cos.\eta}{DC^2 \cdot \cos.\eta^2 - CB^2 \sin.\eta^2};$$

$$KL = \frac{CB\,(DC - FC)\cos.\eta}{\sqrt{(DC^2 \cos.\eta^2 - CB^2 \sin.\eta^2)}}, \text{ et}$$

$$FK = \frac{CB^2\,(DC - FC)\sin.\eta}{DC^2 \cos.\eta^2 - CB^2 \cdot \sin.\eta^2}.$$

Cum porro $NG = FC$; hinc $aN = \frac{FC \cdot \cos.\eta}{\sin.\eta}$.

§. 4. His conſtitutis, veniamus ad determinandum motum coni mixtum. Quia centrum grauitatis coni in plano verticali, per af tranſeunte moueri ſtatuimus, referamus motum eius ad directrices VQ et Qf inter ſe normales, atque ſtatuamus VC eſſe ſpatium ab eo, tempore t, motu a quiete inchoato, confectum. Sit iam maſſa idemque pondus coni duplicis $= 2P$. Quia ex hac parte duplex conus in puncto L ſuſtinetur, ſit Π preſſio, qua ille plano innititur, atque viciſ-

ſim

Digitized by Google

ſim ſecundum directionem L K vrgetur; frictio vero in puncto contactus L ſe exerens, ſit $= \delta \Pi$.

§. 5. Cum centrum grauitatis coni in medio axis ſitum aſſumamus, licet nobis vim P, dimidio totius coni ponderis aequalem in puncto F applicatam atque deorſum verticaliter nitentem concipere. Quare reſoluta hac vi P ſecundum directiones F G et F M, orientur ex hac coni parte quatuor vires eum ad motum ſollicitantes, nempe vis ſecundum F G $= P . \text{coſ.} \Phi$; vis ſecundum F M $= P \text{ ſin.} \Phi$; vis ſecundum L K $= \Pi$; et vis ſecundum L C $= \delta \Pi$; atque totidem pares vires habebimus etiam ex altera huius coni parte. Cum autem directiones virium $P \text{ ſin.} \Phi$ conſtituant inter ſe angulum $= 2 \eta$; atque talem etiam angulum forment directiones virium $\delta \Pi$ a frictione natarum, inſtituta compoſitione orietur ex illis viribus media vis $= 2 \text{ coſ.} \eta . P . \text{ſin.} \Phi$, cuius directio tranſibit per centrum C atque cum *a* N erit parallela; ex his autem obtinebimus mediam vim $= 2 \text{ coſ.} \eta \delta \Pi$, cuius directio verſabitur in ipſa *a* N. Vires autem $P \text{ coſ.} \Phi$ atque Π ſuppeditant nobis vim ſecundum C N $= 2 P \text{ coſ.} \Phi$, atque vim 2Π, cuius directio eſt ipſi C N parallela, atque directioni prioris vis oppoſita. Quare applicatis omnibus his viribus ad ipſum centrum grauitatis C, habebimus duas vires conum ad motum progreſſivum ſollicitantes, nempe vim ſecundum C N $= 2 (P \text{ coſ.} \Phi - \Pi)$ atque vim ſecundum

$$Q N = 2 \text{ coſ.} \eta (\delta \Pi - P \text{ ſin.} \Phi).$$

Vnde ſumto elemento temporis ∂t conſtante, determinatio motus progreſſiui continebitur his duabus aequationibus.

$$\text{I.} \quad \frac{2 g (P \text{ coſ.} \Phi - \Pi) \partial t^2}{P} = - \partial \partial C N.$$

$$\text{II.} \quad \frac{2 g \text{ coſ.} \eta (\delta \Pi - P \text{ ſin.} \Phi) \partial t^2}{P} = \partial \partial Q N.$$

Vbi

Vbi littera g denotat altitudinem, per quam graue primo minuto ſecundo libere delabitur. Quod ſi nunc pro C N atque Q N ſubſtituamus veros earum valores (§. 3.), obtinebimus

$$\frac{2g(P\,\mathit{coſ}.\,\Phi - \Pi)\,\partial t^2}{P} = \frac{\mathit{coſ}.\,\eta\, CB}{\sqrt{(DC^2\,\mathit{coſ}.\,\eta^2 - CB^2\,\mathit{ſin}.\,\eta^2)}}\,\partial\partial FC,$$

$$\frac{2g\,\mathit{coſ}.\,\eta\,(\delta\,\Pi - P\,\mathit{ſin}.\,\Phi)\,\partial t^2}{P} = \frac{\mathit{coſ}.\,\eta}{\mathit{ſin}.\,\eta}\,\partial\partial FC.$$

Ex quibus aequationibus pro determinando valore Π elicitur haec aequatio

$$(P\,\mathrm{coſ}.\,\Phi - \Pi)\sqrt{(DC^2\,\mathrm{coſ}.\,\eta^2 - CB^2\,\mathrm{ſin}.\,\eta^2)}$$
$$= (\delta\,\Pi - P\,\mathrm{ſin}.\,\Phi)\,\mathrm{ſin}.\,\eta\,.\,\mathrm{coſ}.\,\eta\, CB$$

qua euoluta obtinebimus

$$\Pi = \frac{P\,[\mathit{ſin}.\,\Phi\,.\,\mathit{ſin}.\,\eta\,.\,\mathit{coſ}.\,\eta\, CB + \mathit{coſ}.\,\Phi\sqrt{(DC^2\,\mathit{coſ}.\,\eta^2 - CB^2\,\mathit{ſin}.\,\eta^2)}]}{\delta\,\mathit{ſin}.\,\eta\,\mathit{coſ}.\,\eta\, CB + \sqrt{(DC^2\,\mathit{coſ}.\,\eta^2 - CB^2\,\mathit{ſin}.\,\eta^2)}}$$

quo valore iterum in ſecunda aequatione differentiali loco Π ſubſtituto, habebimus

$$\partial\partial FC = \frac{2g\,\partial t^2\,\mathit{ſin}.\,\eta\,(\delta\,\mathit{coſ}.\,\Phi - \mathit{ſin}.\,\Phi)\sqrt{DC^2\,\mathit{coſ}.\,\eta^2 - CB^2\,\mathit{ſin}.\,\eta^2)}}{\delta\,\mathit{ſin}.\,\eta\,\mathit{coſ}.\,\eta\, CB + \sqrt{(DC^2\,\mathit{coſ}.\,\eta^2 - CB^2\,\mathit{ſin}.\,\eta^2)}}.$$

Vnde, ſumto A pro quantitate conſtante, atque inſtituta integratione, obtinebitur

$$FC = \frac{g\,t^2\,\mathit{ſin}.\,\eta\,(\delta\,\mathit{coſ}.\,\Phi - \mathit{ſin}.\,\Phi)\sqrt{(DC^2\,\mathit{coſ}.\,\eta^2 - CB^2\,\mathit{ſin}.\,\eta^2)}}{\delta\,\mathit{ſin}.\,\eta\,\mathit{coſ}.\,\eta\, CB + \sqrt{(DC^2\,\mathit{coſ}.\,\eta^2 - CB^2\,\mathit{ſin}.\,\eta^2)}} + A$$

atque hinc

$$QN = \frac{g\,t^2\,\mathit{coſ}.\,\eta\,(\delta\,\mathit{coſ}.\,\Phi - \mathit{ſin}.\,\Phi)\sqrt{(DC^2\,\mathit{coſ}.\,\eta^2 - CB^2\,\mathit{ſin}.\,\eta^2)}}{\delta\,\mathit{ſin}.\,\eta\,\mathit{coſ}.\,\eta\, CB + \sqrt{(DC^2\,\mathit{coſ}.\,\eta^2 - CB^2\,\mathit{ſin}.\,\eta^2)}}$$

$$CN = \frac{CB(DC - A)\,\mathit{coſ}.\,\eta}{\sqrt{(DC^2\,\mathit{coſ}.\,\eta^2 - CB^2\,\mathit{ſin}.\,\eta^2)}} - \frac{g\,t^2\,\mathit{ſin}.\,\eta\,\mathit{coſ}.\,\eta\,(\delta\,\mathit{coſ}.\,\Phi - \mathit{ſin}.\,\Phi)\, CB}{\delta\,\mathit{ſin}.\,\eta\,\mathit{coſ}.\,\eta\, CB + \sqrt{(DC^2\,\mathit{coſ}.\,\eta^2 - CB^2\,\mathit{ſin}.\,\eta^2)}}.$$

§. 6. His enodatis, ponamus iam conum duplicem, elapſo tempore t, gyrari circa axem principalem F C celeritate angulari $\mho$, in ſenſum L H M L (fig. 3.); ſitque momentum inertiae eius reſpectu huius axis $= 2\,P\,k\,k$. Quia directioues virium $2\,\mathrm{coſ}.\,\eta\,P\,\mathrm{ſin}.\,\Phi$ atque $2\,P\,\mathrm{coſ}.\,\Phi$ per centrum inertiae tranſeunt, momenta earum reſpectu axis gyrationis euaneſcunt.

Momenta autem virium $2\,\text{coſ.}\,\eta\,\delta\,\Pi$ atque $2\,\Pi$ ita erunt comparata, vt momentum vis $2\,\text{coſ.}\,\eta\,\delta\,\Pi$ ſit $= 2\,\text{coſ.}\,\eta\,\delta\,\Pi\,CN$; momentum autem vis $2\,\Pi$ ſit $= 2\,\text{coſ.}\,\eta\,\Pi\,FK$. Vnde ſumma horum momentorum erit $= 2\,\text{coſ.}\,\eta\,\Pi\,(\delta\,CN - FK)$. Quare incrementum celeritatis angularis ♉ *a* hoc momento virium tempuſculo ∂t productum erit

$$\partial \text{♉} = \frac{4g\,\text{coſ.}\,\eta\,\Pi\,(\delta\,CN - FK)\,\partial t}{2Pkk}.$$ Cum vero ſit

$$\delta\,CN - FK = \frac{\delta\,CB\,(DC - FC)\,\text{coſ.}\,\eta}{\sqrt{(DC^2\,\text{coſ.}\,\eta^2 - BC^2\,\text{ſin.}\,\eta^2)}} - \frac{CB^2\,(DC - FC)\,\text{ſin.}\,\eta}{DC^2\,\text{coſ.}\,\eta^2 - CB^2\,\text{ſin.}\,\eta^2}$$

erit

$$\partial \text{♉} = \frac{4g\,\partial t\,\text{coſ.}\,\eta\,\Pi\,CB\,(DC - FC)\,[\partial\,\text{coſ.}\,\eta\,\sqrt{(DC^2\,\text{coſ.}\,\eta^2 - CB^2\,\text{ſin.}\,\eta^2)} - CB\,\text{ſin.}\,\eta]}{2Pkk\,(DC^2\,\text{coſ.}\,\eta^2 - BC^2\,\text{ſin.}\,\eta^2)},$$

quae aequatio integrata praebet

$$\text{♉} = \frac{4gt\,\text{coſ.}\,\eta\,\Pi\,CB\,.\,DC\,[\delta\,\text{coſ.}\,\eta\,\sqrt{(DC^2\,\text{coſ.}\,\eta^2 - CB^2\,\text{ſin.}\,\eta^2)} - CB\,\text{ſin.}\,\eta]}{2Pkk\,(DC^2\,\text{coſ.}\,\eta^2 - CB^2\,\text{ſin.}\,\eta^2)}$$
$$- \frac{4g\,\text{coſ.}\,\eta\,\Pi\,CB\,[\delta\,\text{coſ.}\,\eta\,\sqrt{(DC^2\,\text{coſ.}\,\eta^2 - CB^2\,\text{ſin.}\,\eta^2)} - CB\,\text{ſin.}\,\eta]\int\partial t\,FC}{2Pkk\,(DC^2\,\text{coſ.}\,\eta^2 - CB^2\,\text{ſin.}\,\eta^2)}.$$

Verum eſt

$$\int\partial t\,FC = \frac{gt^3\,\text{ſin.}\,\eta\,(\delta\,\text{coſ.}\,\Phi - \text{ſin.}\,\Phi)\sqrt{DC^2\,\text{coſ.}\,\eta^2 - CB^2\,\text{ſin.}\,\eta^2)}}{3\,\delta\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\eta\,CB + 3\sqrt{(DC^2\,\text{coſ.}\,\eta^2 - BC^2\,\text{ſin.}\,\eta^2)}} + At$$

et $2Pkk = \frac{3}{5}P\,.\,CB^2$; ſubſtitutis igitur his valoribus, orietur

$$\text{♉} = \frac{20gt\,\text{coſ.}\,\eta\,\Pi\,(DC - A)\,[\delta\,\text{coſ.}\,\eta\,\sqrt{(DC^2\,\text{coſ.}\,\eta^2 - CB^2\,\text{ſin.}\,\eta^2)} - CB\,\text{ſin.}\,\eta]}{3P.CB\,(DC^2\,\text{coſ.}\,\eta^2 - CB^2\,\text{ſin.}\,\eta^2)}$$
$$- \frac{20g^2t^3\,\Pi\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\eta\,(\delta\,\text{coſ.}\,\Phi - \text{ſin.}\,\Phi)\,[\delta\,\text{coſ.}\,\eta\,\sqrt{(DC^2\,\text{coſ.}\,\eta^2 - CB^2\,\text{ſin.}\,\eta^2)} - CB\,\text{ſin.}\,\eta]}{9P.CB\,[\delta\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\eta\,CB + \sqrt{(DC^2\,\text{coſ.}\,\eta^2 - CB^2\,\text{ſin.}\,\eta^2)}]\sqrt{(DC^2\,\text{coſ.}\,\eta^2 - CB^2\,\text{ſin.}\,\eta^2)}}.$$

Corollarium I.

§. 7. Quia QN labente tempore continuo creſcit, CN vero continuo diminuitur; palam exinde eſſe poteſt, centrum grauitatis C inter aſcenſum coni reuera deſcendere, atque hunc aſcenſum non verum, ſed apparentem eſſe. Quare ſi recta VC eousque producatur, donec rectae *af* occurrat in puncto quodam *g*, erit V*g* ſpatium, quod centrum grauitatis coni percurrit.

Corol-

Digitized by Google

Corollarium 2.

§. 8. Ex valore ordinatae C N patet, pro aſcenſu coni duplicis non id ſolum requiri, vt interſectio perpendiculi F *g* (fig. 3.) cum longitudine plani *a c* cadat ſupra punctum contactus L, ſed etiam vt tangens anguli inclinationis planorum ſit minor exponente frictionis δ: ſi ergo $\delta = \frac{1}{3}$, vi huius conditionis angulus Φ minor eſſe debet, quam $18^\circ, 26'$; in hypotheſi autem $\delta = \frac{1}{4}$ minor, quam $14^\circ, 2'$.

Corollarium 3.

§. 9. VC (fig. 3.) $= \sqrt{[(VQ - CN)^2 + NQ^2]}$. At eſt

$$VQ - CN = \frac{g\,t^2 \,ſin.\,\eta\,coſ.\,\eta\,(\delta\,coſ.\,\Phi - ſin.\,\Phi)\,CB}{\delta\,ſin.\,\eta\,coſ.\,\eta\,CB + \sqrt{(DC^2\,coſ.\,\eta^2 - CB^2\,ſin.\,\eta^2)}} \text{ et}$$

$$QN = \frac{g\,t^2\,coſ.\,\eta\,(\delta\,coſ.\,\Phi - ſin.\,\Phi)\sqrt{(DC^2\,coſ.\,\eta^2 - CB^2\,ſin.\,\eta^2)}}{\delta\,ſin.\,\eta\,coſ.\,\eta\,CB + \sqrt{(DC^2\,coſ.\,\eta^2 - CB^2\,ſin.\,\eta^2)}},$$

facta igitur ſubſtitutione prodibit

$$VC = \frac{g\,t^2\,coſ.\,\eta^2\,(\delta\,coſ.\,\Phi - ſin.\,\Phi)\,DC}{\delta\,ſin.\,\eta\,coſ.\,\eta\,CB + \sqrt{(DC^2\,coſ.\,\eta^2 - CB^2\,ſin.\,\eta^2)}}.$$

Corollarium 4.

§. 10. Cum duplex conus eousque aſcendat, donec fiat $CN = 0$, erit itaque quadratum temporis totius aſcenſus

$$= \frac{(DC - A)\,[\delta\,ſin.\,\eta\,coſ.\,\eta\,CB + \sqrt{(DC^2\,coſ.\,\eta^2 - CB^2\,ſin.\,\eta^2)}]}{g\,ſin.\,\eta\,(\delta\,coſ.\,\Phi - ſin.\,\Phi)\sqrt{(DC^2\,coſ.\,\eta^2 - CB^2\,ſin.\,\eta^2)}},$$

qui valor in aequationibus pro F C, Q N atque V C inuentis, loco t^2 ſubſtitutus, praebet

$$FC = DC;\ QN = \frac{coſ.\,\eta}{ſin.\,\eta}(DC - A);$$

$$VC = Vg\text{ (fig. 3.)} = \frac{(DC - A)\,DC\,coſ.\,\eta^2}{ſin.\,\eta\sqrt{(DC^2\,coſ.\,\eta^2 - CB^2\,ſin.\,\eta^2)}}.$$

 Corol-

Digitized by Google

Corollarium 5.

§. 11. Poſito ſin. $\Phi = 0$ ideoque, ſumtis planis, ſuper quae duplex conus incedit, pro horizontalibus erit

$$QN = \frac{g\,t^2\,\delta\,coſ.\,\eta\,\sqrt{(DC^2\,coſ.\,\eta^2 - CB^2\,ſin.\,\eta^2)}}{\delta\,ſin.\,\eta\,coſ.\,\eta\,CB + \sqrt{(DC^2\,coſ.\,\eta^2 - CB^2\,ſin.\,\eta^2)}},$$

$$CN = \frac{CB\,(DC - A)\,coſ.\,\eta}{\sqrt{(DC^2\,coſ.\,\eta^2 - CB^2\,ſin.\,\eta^2)}}$$

$$- \frac{g\,t^2\,\delta\,ſin.\,\eta\,coſ.\,\eta\,CB}{\delta\,ſin.\,\eta\,coſ.\,\eta\,CB + \sqrt{(DC^2\,coſ.\,\eta^2 - CB^2\,ſin.\,\eta^2)}},$$

$$VC = \frac{g\,t^2\,\delta\,DC\,coſ.\,\eta^2}{\delta\,ſin.\,\eta\,coſ.\,\eta\,CB + \sqrt{(DC^2\,coſ.\,\eta^2 - CB^2\,ſin.\,\eta^2)}}.$$

Corollarium 6.

§. 12. Si plana, ſuper quae conus incedit, ſumantur inter ſe parallela, erit ſin. $\eta = 0$, atque hinc

$$QN = g\,t^2\,(\delta\,coſ.\,\Phi - ſin.\,\Phi);$$

$$CN = \frac{CB\,(DC - A)}{DC};$$

$$VC = g\,t^2\,(\delta\,coſ.\,\Phi - ſin.\,\Phi);$$

$$\text{♉} = \frac{20\,g\,t\,(DC - A)\,\delta\,\Pi}{3\,P\,.\,CB\,.\,DC} = \frac{20\,g\,t\,\delta\,(DC - A)\,coſ.\,\Phi}{3\,CB\,.\,DC}.$$

Scholion 1.

§. 13. Omnes illae aequationes, quibus motus coni progreſſivus *et* gyratorius continetur, etſi tantum ad duplicem conum, ex duobus conis rectis et aequalibus compoſitum, referuntur, facili tamen negotio ad motum coni, ex duobus conis truncatis compoſiti, accomodari poſſunt. Poſito enim A *m* B *q* A (fig. 4.) eſſe ſectionem coni duplicis, ex duobus conis truncatis A *m* B et B *q* A compoſiti, omnia quae de viribus duplicem conum primae ſpeciei ſollicitantibus ſtatuimus, ad hunc etiam applicari poterunt; ita vt pro accomodandis

dis illis aequationibus ad motum huiusmodi coni nihil aliud requiratur, niſi vt in iis loco D C ſubſtituatur $\frac{C\,m}{CB - mn}$. Qua ſubſtitutione reuera inſtituta, obtinebimus has aequationes:

$$QN = \frac{g t^2 \cos.\eta\,(\delta \cos.\Phi - \sin.\Phi)\sqrt{[C m^2 \cos.\eta^2 - (CB - mn)^2 \sin.\eta^2]}}{\delta \sin.\eta \cos.\eta\,(CB - mn) + \sqrt{[C m^2 \cos.\eta^2 - (CB - mn)^2 \sin.\eta^2]}},$$

$$CN = \frac{[CB\,(Cm - A) + A\,mn] \cos.\eta}{\sqrt{[C m^2 \cos.\eta^2 - (CB - mn)^2 \sin.\eta^2]}}$$
$$- \frac{g t^2 \sin.\eta \cos.\eta\,(\delta \cos.\Phi - \sin.\Phi)(CB - nm)}{\delta \sin.\eta \cos.\eta\,(CB - mn) + \sqrt{[C m^2 \cos.\eta^2 - (CB - mn)^2 \sin.\eta^2]}},$$

$$\text{♉} = \frac{4 g t \cos.\eta\,\Pi\,[CB\,(Cm - A) + mnA]\,[\delta \cos.\eta \sqrt{[Cm^2 \cos.\eta^2 - (CB - mn)^2 \sin.\eta^2]} - (CB - mn)\sin.\eta]}{2 P k k\,[C m^2 \cos.\eta^2 - (CB - mn)^2 \sin.\eta^2]}$$
$$- \frac{4 g^2 t^3 (CB - mn)\sin.\eta \cos.\eta\,\Pi\,(\delta \cos.\Phi - \sin\Phi)[\delta \cos.\eta \sqrt{[Cm^2 \cos.\eta^2 - (CB - mn)^2 \sin.\eta^2]} - (CB - mn)\sin.\eta]}{3 \cdot 2 P k k\,[\delta \sin.\eta \cos.\eta\,(CB - mn) + \sqrt{[Cm^2 \cos.\eta^2 - (CB - mn)^2 \sin.\eta^2]}]\sqrt{[Cm^2 \cos.\eta^2 - (CB - mn)^2 \sin.\eta^2]}},$$

vbi $2 P k k$ deſignat momentum inertiae coni duplicis reſpectu axis gyrationis $m q$.

Ex his vero aequationibus, poſito $CB = 0$, determinabitur etiam motus coni duplicis, ex duobus conis rectis, non baſibus tamen, ſed verticibus ſuis coniunctis, qualem conum (fig. 5.) exhibet. Pro hoc cono erit itaque:

$$QN = \frac{g t^2 \cos.\eta\,(\delta \cos.\Phi - \sin.\Phi)\sqrt{(C m^2 \cos.\eta^2 - m n^2 \sin.\eta^2)}}{\sqrt{(C m^2 \cos.\eta^2 - m n^2 \sin.\eta^2)} - \delta \sin.\eta \cos.\eta\, m n},$$

$$CN = \frac{g t^2 \sin.\eta \cos.\eta\,(\delta \cos.\Phi - \sin.\Phi)\, m n}{\sqrt{(C m^2 \cos.\eta^2 - m n^2 \sin.\eta^2)} - \delta \sin.\eta \cos.\eta\, m n}$$
$$+ \frac{A\, m n \cos.\eta}{\sqrt{(C m^2 \cos.\eta^2 - m n^2 \sin.\eta^2)}},$$

$$\text{♉} = \frac{20 g t \cos.\eta\,\Pi\,.\,A\,[\delta \cos.\eta \sqrt{(C m^2 \cos.\eta^2 - m n^2 \sin.\eta^2)} + m n \sin.\eta]}{3 P m n\,(C m^2 \cos.\eta^2 - m\,\iota^2 \sin.\eta^2)}$$
$$+ \frac{20 g^2 t^3 \sin.\eta \cos.\eta\,\Pi\,(\delta \cos.\Phi - \sin.\Phi)\,[\delta \cos.\eta \sqrt{(C m^2 \cos.\eta^2 - m n^2 \sin.\eta^2)} + m n \sin.\eta]}{9 P m n\,[\sqrt{(C m^2 \cos.\eta^2 - m n^2 \sin.\eta^2)} - \delta \sin.\eta \cos.\eta\, m n]\sqrt{(C m^2 \cos.\eta^2 - m n^2 \sin.\eta^2)}}.$$

Ex valore ordinatae C N facile perſpicitur conum, ex duobus conis rectis, verticibus ſuis coniunctis, compoſitum, atque planis inclinatis $b\,a\,c$ et $c\,a\,\partial$ (fig. 2.) impoſitum, non apparenter, ſed reuera aſcendere, dummodo quantitates $\delta \cos.\Phi - \sin.\Phi$ atque $\sqrt{(C m^2 \cos.\eta^2 - m n^2 \sin.\eta^2)} - \delta \sin.\eta \cos.\eta$ ſint ſimul aut poſitiuae, aut negatiuae.

PHY-

Digitized by Google

Digitized by Google

PHYSICA.

Digitized by Google

PLANTA
NOVI GENERIS ALPINA,
PARNASSIAE AFFINIS.

Auctore
E. *L A X M A N N.*

Conuent. exhib. die 5 Octob. 1789.

Radix perennis, ſimplex, praemorſa, circa medium fibroſa, ad caulem gemmoſa.

Folia radicalia, oualia, integerrima, quinque-neruia, bina rarius terna, petiolata, petiolis breuiora.

Caulis vnicus, rariſſime plures, ſpithamalis, erectiuſculus, angulatus, flore vnico terminatus, foliolo in medio ouato amplexicauli. Fig. 1.

Calycis perianthium pentaphyllum, foliolis lanceolatis patentibus. Fig. 2.

Corolla pentapetala, vnguibus erectis, longitudine calycis; Limbis ouatis, integerrimis, patentiſſimis. Fig. 3.

Digitized by Google

Nectaria quinque germen cingentia, erecta, breuia, trifida; laciniis aequalibus ſubglanduloſis. Fig. 5.

Staminum filamenta quinque, ſubulata, patentia, nectariis duplo longiora; Anthera erecta. Fig. 4.

Piſtilli germen ouatum, ſtylus breuis, ſtigma ſimplex.

Character genericus itaque in calyce pentaphyllo, corolla pentapetala, et nectariis quinque trifidis conſiſtit.

COM-

COMMENTATIO
NOVAE NOMENDATVRAE CHEMICAE CONDENDAE NECESSITATEM ET LEGES LVSTRANS.

Auctore
LAVRENTIO CRELLIO.

Conuent. exhib. die 24 *Mai.* 1790.

Quanta ſint emolumenta, quae ex lingua copioſiori et locupletiori, eademque immutabili, nec non ad certas quasdam loquendi normas atque leges diſpoſita, capiuntur, ipſo communi vitae vſu edoctus, nemo multo minus literarum peritus erit, qui dubitet. Conſtat enim, nos vnicuique, eiusdem linguae ſocietate nobiscum coniuncto, cogitata, mentisque noſtrae ſenſa tam diſtincte, clare, pleneque, quam ipſi ea mente concepimus, impertiri, atque explicare, ſicque eum modo in opiniones noſtras adducere, modo optatis noſtris voluntatem eius nos poſſe reddere conformem. Quodſi vero ex eiusmodi lingua, omnibus numeris abſoluta, in vita quam vocant communi, commoda percipiuntur adeo praeclara; quos quaeſo fructus ad artium, ſcientiarumque ſtudium inde redundaturos eſſe arbitreris, ſi quae mente conceperas ipſe, adeo accurate et diſtincte exprimere et cum aliis communicare potueris, vt ii, quibuscum colloqueris,

ſententiam tuam ſtatim adſequantur, penitusque intelligant, dummodo verba atque vocabula, quibus vſus fuerat, auribus recte perceperant. Inter omnes vero artes atque ſcientias, talis, qualem modo deſcripſimus lingua locuples, atque ſignificationibus ſingulorum vocabulorum ſemel ſancilis adſtricta, ei maxime neceſſaria eſt, quae factis, vt dicunt, vel rerum euentibus nititur, quippequi vel commutato rerum perficiendarum, vel enarrandarum iuſto *ordine*, ſiue accedentibus terribus quibusdam modificationibus parum accurate definitis, aliam induunt ſpeciem, ſperata minus congruam. Inter has vero artes etiam phyſicam, quam latiſſime patet, et grauiſſimam imprimis eius partem, artem chemicam referendam eſſe, quis eſt, qui ignoret! Etenim chemicum ante omnia oportet, vt res eas, quas inueſtigandas ſibi ſumſerat, non ſolum accurate definiat, verum etiam, qui fuerit commiſcendi modus, quae rerum inuicem mixtarum ratio, clare indicet. Simulac enim rerum inter ſe iungendarum ordo permutatur, et quae prius adhiberi debuiſſet, ſerius additur, ſaepius minime efficitur, quod effectum iri ſperabas. Sic e. gr. prouti in nitri aethere conficiendo, acidum debilius vel forte, ſpiritum vini communem vel maxime depuratum adhibueris, atque illud huic, vel hanc illi conmiſcueris, fluida prodeunt prorſus inuicem diuerſa. Quae cum ita eſſe deprehenderem, atque in ſcriptis non nullorum chemicorum Gallorum, de arte chemica optime meritorum perlegendis, inciderem in chemicas loquendi formulas prorſus nouas, et ab ipſis eum in finem inuentos, vt mutentur plane, quae hucusque in vſu erant (*), operam non prorſas inanem atque ſuperuacaneam me ſuſcepiſſe putabam, ſi pro virium modulo paullo accuratius diſcuterem quaeſtionem hancce:

Vtrum

(*) Vid. inprimis Methode de Nomenclature chimique, propoſée de M. M. de Morveau, Lavoiſier, Bertholet & de Fourcroy. Paris 1787. 8.

Vtrum eiusmodi lingua, de qua paullo ante ſermo fuit, perfectiori et accurata ſatis, in explicandis rebus chemicis iam gaudeamus? an ſi minus, lingua ea, qua iam vtimur, immutari debeat? et quaenam potiſſimum ſint praecepta, quae in eadem immutanda ſequi poſſimus vel debeamus?

Quodſi vero *linguae chemicae* voce fruor, me non tam loquendi formulas atque terminos, quos vocant technicos, ad priſtinam chemiae formam adcommodatos, quibus vſi ſunt praeterlapſorum ſaeculorum, vel priorum adeo huius ſaeculi decenniorum chemici, ſed potius loquendi morem, ex inuentionibus, correctionibus atque huius artis emendationibus, quas viris illuſtribus, *Marggrafio*, *Prouellio*, *Macquerio*, *Scheelio*, *Bergmanno*, cet., acceptas referimus oriundum, et praecipue ab eo, quem vltimo loco nominari, ſemel quaſi ſancitum, et a diſcipulis atque cultoribus eius in ſcriptis adhibitum, intelligi velle, vix eſt, quod moneamus lectores.

Antequam vero ad argumentum ipſum accedamus tractandum, monendi mihi videntur linguae emendatores, vt ante eiusdem immutationem penitus inquirant; ſuperentrie fructus ex eadem redundaturi, incommoda indidem oriunda, nec ne? Ad quae quidem incommoda praecipue pertinet hoc: Facta linguae (et feliciſſima) commutatione, vnum quemque, cuius haec res intereſt, iam nunc oportere, vt tum priſcinum, quam recentiorum loquendi morem cognitum ſibi reddat: illum, vt veterum ſcriptis, ad priſtinum illum loquendi morem ad commodatis, iisque minime ſpernendis vti, ſententiasque ſuas, vbi noua illa lingua nondum vbique recepta eſt, cum aliis communicare poſſit; hunc vero, vt data nouis terminis vtendi opportunitate, aliorum mentem recte intelligat, propriam apte explicet. Quid inde? nouae quidem rerum denominationes (licet praeſtantiſſimae, priſtinis longe meliores, clariores, breuiores,

res, et ad res deſignandas aptiores) ſaepius inducere poſſunt in errores, in retinendis veterum dicendi formulis neutiquam extimeſcendos; ipſiusque ſcientiae diſcendae facilitatem (cuius tamen cauſſa ſolummodo illae ipſae inuentae eſſe perhibentur) magis impediunt; (ſiquidem iam nunc duplicem eiusdem rei determinationem memoriae imprimas neceſſe eſt), ac ſi in adhibendo maiorum loquendi more (licet forſan non adeo idoneo) adquieuiſſemus: verbo: ſi molumenta nouae einsmodi linguae, etiam longe melioris, ab incommodis inde oriundis ſuperantur, tantum abeſſe crediderim, vt ſcientias nouis dicendi formulis obruendas eſſe ſtatuamus, vt potius priſtinas ſemel quaſi ſancitas, retinendas, et vbi forte aliquae paullo obſcuriores, minus que aptae videantur, paucis circumſcribendas atque explicandas eſſe iudicemus: ſed haec hactenus. Iam ad argumentum noſtrum propius accedamus tractandum.

I. Primum ad *res nouas* deſignandas *noua* etiam *vocabula* fingenda eſſe res ipſa docet, et per ſe ſatis perſpicuum eſt. Hinc e. g. factum eſt, vt in linguam latinam verba adeo multa, res in vita communi, in re militari etc. obuerſantes, deſignantia, reciperentur, quae antiqua Roma prorſus ignorabat, ſiquidem res iſtae poſt interitum demum huiuscerei publicae inuentae erant. Sic etiam, qui ſub tempora noſtra in arte botanica, reliquaque hiſtoria naturali floruerunt, et qui inter hos facile principem locum tenet, *Linnaeus*, multa eaque antea inaudita plantarum animaliumque nomina excogitare cogebantur, ad deſignandas res eas, quae ex diſſitis, anteaque haud cognitis terrae regionibus ad nos perferebantur.

II. Deinde vero antiqua rerum vocabula cum recens inuentis permutanda videntur, ſimul ac priſtinis meliora aptiora atque clariora excogitari poſſunt. Quod ſi igitur

Digitized by Google

1) Voces quaedam non ſatis firmam habeant ſignificationem, ita vt non ſemper vnam eandemque rem deſignent, indeque fluctuans oriatur incertitudo, novae voces in locum priſtinarum ſubſtituendae videntur. Sic idem ille *Linnaeus*, de naturae hiſtoria immortaliter meritus, multa antiqua herbarum vocabula cum nouis commutare, arctioremque ſignificationem iis ſubiicere haud dubitauit, quoniam botanici veteres linguae technicae ἀκρίβεια carentes, ſaepe numero plantae cuiusdam nomen, quo alii ad deſignandam plantam aliquam vſi erant, ad herbae genus tranſtulerunt prorſus diuerſum.

2) Deinde ſi vocabulum aliquod vnam tantummodo rem deſignet, exemtis omnibus aliis, ita vt omnes, qui vim eius cognoſcunt, hanc vnam nec aliam rem intelligant; ſuadenda tamen videri poſſit huius vocabuli cum recentiori permutatio, ſi vocabulum hoc artis minus peritos in errorem inducere poſſit: id quod, ſi quid iudico, tum praecipue accidit, ſi *vel* nomen cum ipſa re pugnat; (ſicut oleum tartari per deliquium, oleum martis, quae quidem nomina naturae horum fluidorum plane incongrua ſunt, ſiquidem cum oleo nil prorſus habeant commune, neque, vt oleum, comburi poſſunt): *vel* ſi nomen quoddam, quamuis cum rei deſignandae indole haud plane pugnet, alienas tamen quasdam de hac re ideas excitare poſſit: e. g. Mercurius praecipitatus ruber; in quo conficiendo metallum minime, ope alius rei, e menſtruo ſuo eiectum eſt, (id quod tamen ex nomine iſto colligi poſſit); ſed hoc tantum vi ignis ab illo ſeparatum eſt.

3) Porro etiam nomen aliquod, ſi a rebus quibusdam externis, et ad rei deſignandae naturam plane non pertinentibus repetitum quamuis errores non excitet, rei tamen ipſius indolem nullo modo exprimat, adiuuandae perſpicuitatis cauſſa iam nomine alio, eodemque rei ipſius naturae magis congruo,

per-

permutandum eſſe videtur. Sic e. g. appellationes iſtae, *ſal mirabile Glauberi*, *ſal Seignetti*, per ſe quidem non ſunt reiiciendae, vt erroneae: quid? quod laudanda videtur conſuetudo, memoriam virorum illuſtrium, nouis rebus inuentis de arte quadam vel ſcientia benemeritorum, ipſorum nominibus, inuentis iſtis apponendis, conſeruandi! Sed quamuis eiusmodi cognomenta in tractandis aliis ſcientiis atque artibus e. g. botanica, adhibenda eſſe inficias ire haud auſim (notae enim characteriſticae plantarum non ſemper breui aptoque cognomine comprehendi poſſunt); ad artem tamen chemicorum, qui variis ſalis ſpeciebus, et id genus aliis, nomina imponere poſſunt, characteres diſtinctiuos eorum ſimul breuiter exprimentia, vix admittenda, adeoque ſal, quod vocant Glauberi et Seignetti, aptius *ſodam vitriolatam*, et *tartariſatam* vocandam eſſe cenſuerim.

4) Denique et tum verum nomina mutari poſſe crediderim, ſi pro conſuetis alia, indolem eius melius penitiusque declarantia, atque per ſe mutationi non obnoxia excogitari potuerint. Quanto plures enim rei cuiusdam proprietates vno vocabulo comprehenduntur atque exprimuntur, et quo ſtabiliora ſunt haec nomina, eo facilius etiam memoriae mandari poſſunt. *Illud* per ſe clarum eſt; ſed et *hoc* facile mihi largieris, dum modo memineris, nos verborum ſignificatione ſemel ſtabilita, addiſcendae vocabulorum varietati, ex verum his nominibus deſignandarum, viciſſitudinibus oriundae, commode ſuperſedere poſſe; vt taceam de erroribus rerumque inter ſe permutationibus, quibus vocabulorum, vnam eandemque rem deſignantium farrago viam aperit. Exempla non deſunt denominationum, a patria, vel loco primae inuentionis, colore, magnitudine effectu, et id genus aliis deſumta. Sic nomina Salis Rupellenſis, Anglicani, hepatis ſulphuris, ſalis ſedatiui,

ca-

Digitized by Google

catharctici, digeſtiui, panaceae, ſalis ſecreti, cet. expungenda ſunt: etenim Soda tartariſata, Magneſia vitriolata, aliis quoque locis, quam Rupellae et in Anglia parantur: (ab illis itaque etiam denominanda)? Dantur pluria quoque ſalia, quae effectum ſedatiuum, catharcticum, digeſtiuum edunt; et ſic porro.

5) Poſtremum nec illa linguae commutatio ſpernenda videtur, ex qua breuiores dicendi formulae amplioribus et diffuſis rerum circum ſcriptionibus praeferuntur, terminique doctrinales ad vulgarem, quam praecepta Grammatices requirunt, verborum flexionem conformantur. Breuiores enim formulae facilius memoria teneri poſſunt, et facta hac breuiorum cum fuſioribus commutatione, non ſolum in loquendo, ſed etiam in legendo ſcribendoque, temporis faceremus compendium, profecto haud parui aeſtimandum. Bene igitur noſtrates, pro: *Alcali aëre fixo ſaturatum*, *Argentum in acido nitri ſolutum*, nunc *Alcali aëratum*, *argentum nitratum*, ſubſtituunt.

His iam ita conſtitutis, argumenta iſta, quae linguae mutationem in vniuerſum commendare videntur, ad technicum in chemia loquendi morem, quo hodie vtimur, transferamus; quae inde ſequuntur diligentius denique ponderaturi. Iam vero

I. Primum illudque princeps argumentum, quo ad linguae immutationem omnino commendandam vtebamur, idque a rerum recens inuentarum nouis nominibus deſignandarum vrgente neceſſitate repetitum, hic vix audiendum videtur. Nam, quae inde a *Scheelii* atque *Bergmanni* temporibus in arte chemica plane noua reperta ſunt; minime ita comparata videntur vt eorum cauſſa omnis chemicorum loquendi vſus immutandus ſit. Experimenta quidem cel. *Cauendish* ſaepiſſime repetita, quibus, ex combuſtione aëris vitalis et inflammabilis, aquam aliquam prodire, demonſtrabat, quae recens nata ei videbatur, poſt

poſt tempora illa innotuerunt. Alii, aërem vitalem principium atque cauſſam omnis acidi eſſe, eiusque acceſſionem ſulphuris atque phoſphori ſubſtantias ſimplices, ideoque caeterum non mutatas, acidas reddere, euincere ſunt conati; quamobrem aërem vitalem *acidificum* (oxygenium) inflammabilem vero *aquificum* (hydrogenium) compellari voluerunt. Sed fac, experimenta iſta aeque certa eſſe, ac adhuc ſunt dubia, iſtae tamen aëris ſpecies nomina ſua, a phaenomenis in ſenſus incurrentibus, quae etiam poſt inuenta illa experimenta adhuc eadem ſunt, retinere effectusque illi, qui iis tribuuntur, inter reliquas earum affectiones referri potuiſſent; praeſertim cum effectus, experientia haud ſatis certe confirmatos, nomini ipſi alicuius rei inſerendas eſſe vix crediderim; de qua re infra adhuc dicendi locus erit. Omiſſa igitur horum experimentorum vberiori disquiſitione, quam alii occaſioni conſeruandam cenſui, hoc vnam tantummodo contendere auſim: tum, cum haec vel alia rei cuiusdam phaenomena noua, extra omnem dubitationis aleam poſita fuerint, nominis noui, reique naturae congrui, formationem omnino vtilem eſſe poſſe: quae tamen non omnis loquendi moris, hucusque quotidiano vſu ſanciti, euerſionem atque immutationem requirit. Iam pergamus ad

II. Argumentum ſecundum, ex quo antiqua rerum vocabula cum recens inuentis permutanda videbantur, ſimul ac antiquis meliora excogitari potuerint, ad terminologiam chemicam, quam immutandam credunt, absque omni partium ſtudio adcommodandum

1) Quod in explicando huius argumenti ambitu, primo loco ponebamus, voces nouas in locum priſtinarum eſſe ſubſtituendas, ſi forte priſtinae non ſatis fixam habuerint ſignificationem, in chemicorum terminologia hodierna, ſi quid ſentio, vix locum habere videtur. Voces enim technicae, quibus che-

chemici recentioris aeui vtuntur, ſerius ſemper ſundunt accurate determinatum, nec facile ad plures res deſignandas transferri queunt. Olim quidem chemicorum terminologias fluctuantis ſignificationis vitio laboraſſe, minime diffiteor: (nam e. g. ſalia neutra ex acido tartari oriunda, vel cum alcali vegetabili fixo vel volatili commixta, a veteribus communi nomine, tartarum ſolubilem vocata eſſe, nec non ipſi cel *Macquero* adeo aërem phlogiſticum et fixum, (vel acidum aëreum) vnum idemque fuiſſe, quis, quaeſo, ferre potuerit?) ſed quod anteceſſores factitarunt, non idem imputandum eſt recentioribus, coaeuisque.

2) Quod autem ſequitur ex argumento ſecundo deductum linguae immutandae praeceptum, quippe quo nomina ea reiicere iubemur, quae artis minus peritos in errores inducere poſſint, dignum eſt, quod paullo diligentius examinetur. Nimirum ſunt, qui hoc praeceptum ante oculos habentes e. g.

a) Reprehendant, calcem vulgo metallicam dictam, quamuis natura eius indoli calces virae nequaquam reſpondet, ab ipſa tamen calce viua nomen traxiſſe: ſed habeo, quod reſpondeam *α*) primum enim et ad id quidem praecipue attendi velim, cum ex communi loquendi vſu non vnice terram calcaream, eamque igni fortiori expoſitam, *calcem* (viuam) vocare, ſed etiam Gypſo, ſimili modo ab ignis vehementia mutato, calcis vocem addere ſoleamus; (*Gypskalk*) vniuerſalis calcis notio ſolummodo ad valde immutatam alicuius rei conditionem, ex ſolius ignis vehementioris (nec tamen fundentis, vere indurantis aut comburentis) vi reſpicere videtur. Qua quidem notione calcis vocabulo ſubiecta, ipſum hoc nomen competere etiam videtur metallicis iſtis ſubſtantiis, quae ignis violentiae hac ratione expoſueramus, quaeque ideo calcinatas dicimus

Digitized by Google

cimus (*) β) deinde vero, ſi inueniendae nouae terminologiae defenſores hanc notionem calcis parum congruam eſſe exiſtiment, (**) et metalla, vllo modo in calcem conuerſa dici poſſe negantes, vrgeant atque inſtent, vt nouo quodam nomine compellentur mutatam hanc metalli conditionem, vel noua aliqua nominis eiusdem flexione qualicunque (***), vel ſi et haec ratio, ad nouiſſimos linguae mutendae conatus conformata, minus placuerit, nomine, praecipuam ſenſibus ſubiectam metalli

(*) Negari minime poteſt, mutationes has igne productas (e. g. ſi terra calcaria aluminoſa gypſum, ſtannum, ſub eodem fornice docimaſtico, eidem igni exponantur) varii eſſe generis. — Terra calcaria duritiem aliquam, quam adepta eſt, amittit (aquae, cui magnum colorem impertitur, immerſa) et plane in puluerem fatiſcit. Gypſi, cum aqua commixti maior fit cohaeſio: terra aluminoſa, inſignem duritiem adepta, eam in aqua nec amittit, nec maiorem recipit (ideoque non calcinata, ſed vſta audit). Stannum amiſſo ſplendore metallico, pulueris ſpeciem adſumſit, ab aqua non mutandam.

(**) Calcis vocem ad metalla, haud idonea ratione transferri poſſe lubens concedo; quippe quae (praeter ignem) et aëre, et acidis et ſulphure cet. permutari poſſunt, permutataque iisdem fere gaudent proprietatibus, quae tamen ſub calcis voce ſenſu ſtrictiori ſumta, minime comprehendi poſſunt. Quae cum negari nequeant, aut noua denominatio, omnibus, quae metallicae hucusque dici ſolebant, calcibus congrua, excogitari, aut antiqua vox calcis retineri, retentaque ſenſu duplici, ſtrictiori et latiori, ad eas applicari debet; (id quod ecquidem propter loquendi vſum in omnibus fere linguis maxime ſolemnem praetulerim): notio igitur eiusmodi calcis ex qualitatibus in ſenſus incurrentibus deducta, huc redit: eſt metallam, ſplendore metallico priuatum in minimas particulas diuiſum, et terrae haud diſſimile; id quod fit vel igne, vel menſtruis quibuscunque.

(***) E. g. ferrulum, argentulum, vel ferras, argentas, vel addendo et priuatiuum, aferrum, abargentum, cet: mihi vero magis arridet retinere antiqua; quod ſi non liceat, praeferrem primo loco propoſitam mutationem.

li mutationem exprimente (*); deſignandam eſſe putauerim: nam qui materiam acidificam in aëre, contineri arbitrantur, oli valde dubium adhuc eſt, ſic etiam in calcibus ſic dictis metallicis, in ſenſus non incurrit: ideoque quid ſub oxydis intelligatur, imperitis diligentius adhuc explicetur neceſſe eſt, vt ſciant, metalla ſic vocari, quae ſub ſpecie terriformi adparent, proprio ipſis ſplendore orbati.

b) Praeterea etiam nomina acidi nitroſi, vitriolici, phosphorei nonnullis minime arrident, quippe quibus diuerſus acidorum ſtatus non ſatis luculenter diſtinguatur, neque indicetur, quando pura ſint acida, et quando, vt cum veteribus chemicis loquar, alienum phlogiſticum quid, vel, vt aiunt recentiores, nondum ſatis copioſam oxygenii materiam contineant. Quare ſtatum illum posteriorem ſimili quadam nominis radicalis flectione (e. g. nitroſum, ſulphuroſum, phosphoroſum) et priorem nominis forma paullulum immutata (e. g. nitricum, ſulphuricum, phosphoricum) inuicem diſtinguere ſolerit, et vero diſcrimen hoc ſaris magnum, a chemicis antea ſaepiſſime iam obſeruatum eſt; *alterum* acidi genus, *nitricum*, acidum nitroſum (vel addita etiam voce, purum aut dephlogiſticatum) *alterum*, nitroſum phlogiſticum appellantibus. Quodſi vero poſterior haec denominatio aduerſarium rei phlogiſticae offenderit, reiecta hac, acidum illud commode *imperfectius* nominari poſſe crediderim; quod quidem nomen cum vtroque ſyſtemate conciliari poteſt; vtrum vero recentiſſimum illud nomen, breuitatis cauſſa, praeferendum ſit, nec ne, de ea quidem re infra diſputabitur.

 3)

(*) *Argentum*, *ferrum*, *terrale* quia vox haec obſoleta), vel *demetalliſatum*, et actio ipſa, *terriuertere*, *demetalliſare*, aut quae ſunt nomina alia.

3.) Tertia linguae immutantae ratio, argumento ſecundo comprehenſa, eaque a perſpicuitate, (fingendis vocabulis noris, reique cuiusdam naturae magis adaptatis, adiuuanda) repeti ſolita, vix audienda videtur, vbi de immutando chemicorum loquendi more vſitato ſermo fuerit. Exceptis enim vocabulis nonnullis, (e. g. hepar et lac ſulfuris, mineralis aethiops, et Kermes) quae quidem nomina exiguae cum aliorum corporam colore ſimilitudini, ſuperſtructa ſunt, omnia ſatis clara, nec perſpicuitatis cauſſa mutanda videretur. Quid enim vocibus, e. g. calx ſalita, ſoda nitrata, argentum vitriolatum cet. clarius ad res deſignandas, ac quibus haec et i. g. a. compoſita ſunt excogitari poteſt.

4.) Regulam vero quartam, quae terminologiae mutationem ſuadet, ſimulac pro conſuetis vocabula, maximum qui poteſt, qualitatum numerum exprimentia, et ſuapte natura ſtabiliora, excogitari poſſint, quamque recentiores linguae chemicae reformatores ante omnia vrgent, ecquidem etiam a terminologiae huiusque vſitatae auctoribus, modo aliter et niſi forte paullo liberius loquutus fuero, adhuc melius atque diligentius obſeruatam eſſe contendere auſim. Hos quidem non minus ac illos ad vnum eundemque ſcopum, modo diuerſis viis, tendere videbis, dummodo attenderis ad ea, quae iam ſequuntur.

Nimirum nomen aliquod tum potiſſimum perpetuum, atque immutabile dici meretur, vbi iis rerum affectionibus ſuperſtructam eſt, quae mutationi haud obnoxiae, ideoque ex rerum natura atque indole repetitae ſunt. Iam vero, quamuis naturam alicuius rei tam ratiociniis quam experientia, vel vtroque veri indagandi ſubſidio adhibito, cognoſci poſſe, inter omnes ſatis conſtet; in denominationibus tamen rerum materialium, ex attributis, (quae ex indole rerum ipſa deducta, ſemper et perpetuo illis competunt,) repetendis, eiusmodi tantum attri-

attributorum rationem habendam eſſe exiſtimauerim, quae ſola experientia duce cognoſcuntur, quippe quae in tanta internae corporum naturae obſcuritate vnite conſulenda videtur. Haec autem experientia, quae ad rei alicuius nomen, (indoli eius conueniens) fingendum requiritur non niſi pura ſit; i. e. *ſoli* apperceptioni, ope ſenſuum factae, innitatur neceſſe eſt; nam experientiae mixtae, praeter ſenſuum affectionem, etiam ratiocinium ſubeſt; id quod falſum eſſe ſubeſt, vel, quia ambiguam, minusque rectam ratiocinandi methodum adhibueramus; vel, quia ideae iſtae, quae ſubſunt ratiocinationi, erroneae erant, partim quia *iamiam cognitarum notionum* ambitum totum *non vndiquaque* circum ſpexeramus, partim quia, *quibus hucusque* gaudebamus, *correctione* indigere poſſunt, quae inuenta futura ſuppeditabunt. Quodſi igitur, certa quaedam praecepta ſecuti, inconcuſſae verborum ſtabilitali conſulere volumus; nulla alia nomina rebus imponenda videntur, quam quae ipſi rei naturae ſola experientia pura cognitae, ſuperſtructa, ideoque ſuapte natura (ſenſus noſtros vno ſolum modo afficiente,) ſemper retineri poſſunt; vel ipſo ſyſtemate (ſiue puraram et mixtaram experientiarum, axiomatum et hypotheſium coordinatione,) quantumuis mutato. Tantum vero abeſt, vt in ratiociniorum tanta pro ratione notionum atque inuentionum accedentium diuerſitate, denominationes his ipſis ratiociniis ſuperſtructae, omni virorum doctorum poſteritati arrideant, vt ne omnibus quidem coaevis idoneae videri poſſint. (*)

Iam

(*) Quam multae atque diuerſae rerum denominationes, quarum aliae aliis praeſtare credebantur, prolatae ſint, ex quo viri docti nomina rerum ad earundem attributa, quae eſſentialia illis videbantur, accommodanda eſſe ſtatuerunt, teſtem habemus experientiam. Sic breui temporis ſpatio, praeter illuſtres Galliae chemicos, cel. *Gadolin* (Animaduerſ. in nov. nomenclat. chem. method. Aboae 1788) cel.

Iam terminologiae chemicae hucusque vſitatae auctores in nouis rerum nominibus fingendis, id ante omnia egerunt, vt ea rerum attributa, quae in ſenſus incurrunt inueſtigarent, inueſtigatisque vel nomen iam vſitatum, vel recens excogitandum adaptarent. Sic e. g. acidum vitrioli dicitur illud, quod cum terra calcaria coniunctum, gypſam, (cet.) acidum fluoris vero id, quod eidem terrae admixtum, fluorem mineralem efficit. Iam vero, cum terram calcaream eam eſſe, quae igni vehementiori expoſita, aqua affuſa efferueſcit, et in eadem reſoluitur, cet., inter omnes ſatis conſtet; nomina iſta, a certis hisce atque indubitatis euentibus repetita, etiam plane perſpicua, et rei naturam plane exprimentia, nullique mutationi ſubiecta eſſe, quis quaeſo dubitauerit? Ad *voces* vero nomenclaturae chemicorum hucusque vſitatae *compoſitas*, easdemque eodem modo deductas quod attinet; et has aeque planas et immutabiles eſſe, dubio caret; e. g. calx vitriolata, fluorata. At vero chemici retentiſſimi etiam interiorem rerum naturam nominibus exprimendam eſſe rati, non puram ſolum, rerumque modo euentibus nixam, ſed mixtam etiam ratiociniis experientiam, in inueniendis nouis rerum nominibus conſuluerunt; quamuis ſe nonniſi puram ſequutos eſſe nobis perſuadere velle videntur. Sic nomino iſto adhibito, acidum ſulfuricum, exprimi volunt, ſulfur ſimplex oxygenii ope, (quod aeris vitales baſin conſtituere perhibent,) acidicalem ſuam demum recepiſſe. Verum hoc haud prius pro certo habere poterimus, quam quatuor haec, argumentis firmis atque idoneis, confirmata fuerint:

cel. *Hopſon* (a general ſyſtem of chymiſtry, digeſted and arranged with a particular view to its application to the arts: taken chiefly from the German of Mr. *Wi.g eb.* London 1789) et cel. *Arciula* Hiſpanus (Journal de Phyſique M. Octob. A. 1788. p. 262., ad res easdem deſignandas magnam vocabulornm excogitaverunt varietatem, maioremqne excogitatum iri, quis dubitaoerit?

rint: *primum* ſulfur pro ſubſtantia ſimplici, in alias partes remotiores non diſſoluenda, ſiue elemento, habendum eſſe; deinde ſulfur in acido ſulfuris adhuc latere in ſua, vt dicunt, ſubſtantia integra; porro aërem vitalem in iſto acido contineri; denique hoc ipſum ex ſolo aëre vitali accedente oriundum eſſe. Quae tamen omnia vere ita ſe habere, ſenſibus nemo percipere poteſt: itaque non ſunt res experientia ſimplici perceptae, et, vt dicunt, in facto poſitae, ſed maximam partem ſeriei ratiociniorum innituntur, quae etiamſi vel maxime, de quo tamen valde dubito, noſtri quidem aevi chemicis tantum non omnibus probarentur, futuri tamen aevi obſeruationibus atque inuentis non infringi, neque refutari *poſſe*, quis eſt, qui adfirmet? (*) Quis enim quaeſo, eo audaciae procedet, vt poſteros adhuc penitius rerum naturam indagaturos eſſe neget? Quis eſt, qui non ante paucos abhinc annos, aquam pro elemento ha-

(*) Sulfur non minus ac phosphorum, poſt deflagrationem ſub acidi ſpecie adparere pura experientia edocti, exploratum habemus; minime vero, quod illi contendunt, eadem (pro elementis habita, ideoque immutabilia;) recepto tantum aëre vitali, acida fieri. Senſuum modo ope neque demonſtrari, neque refutari poteſt, in ſulfure atque phosphoro acidum aliquod contineri, quod cum ſolo aëre inflammabili coniunctum ſit; hunc ipſum vero aërem igne ſiue expelli, ſiue commutari, ſiue ita inuolui, vt amplius dignoſci nequeat, eumque dum recedat ab acido, locum dare aëri vitali, et materiae aquoſae (in hoc vel contentae, vel recens productae) ſeſe cum acido coniungendi, ſitque aëris inflammabilis (forſan tantum commutati, aut aëri vitali atque aquae admixti) vel ipſam iacturam abunde compenſandi, ita, vt ne pondus quidem vllo modo diminuatur, quin augeatur. Quibus quidem miſſis, id ſaltem rei phlogiſticae aduerſarii multo minus adhuc negare valent, fieri poſſe, vt acida quaedam materia per aërem inflammabilem ita immutetur, vt illa, ſenſibus amplius, qua talis, dignoſci non queat: aquam enim, ſubſtantiam adeo lenem inſipidamque, e materia acidifica (oxigenio) et aëre inflammabili conſtare, et ſeparato hoc aëre, illam iterum adparere ipſi perhibent.

Digitized by Google

habuerit? nihiloſecius plurimi hodie ſunt, qui eam ex duobus aëris generibus compoſitam eſſe exiſtiment. — Aërem, quem dicunt fixum, vel acidum aëreum e ſubſtantia carbonaria atque oxygenio conſtatum eſſe contendunt! Quis vero noſtrum ſubſtantiam illam carbonariam, quam acido aëreo ineſſe exiſtimant, ſenſuum opere percipere potuit? (*) Quum itaque acido aëreo ineſſe, cum ratiociniis tantum demonſtrari queat; haec vero, quibus tota argumentatio innititur, ratiocinia non cuilibet arridere, ſed addubitari adhuc, quin refutari poſſint; cumque demum corollaria prorſus alia ex rebus facti, quibus vera argumentatio tamquam fundamento ſuperſtrui debet, elicere liceat: nomina quoque talia, quia ad haec propriae opinionis commenta (ſ. hypotheſis) adcommodata ſunt, per ſe mutabilia, et nunc et olim retentum iri vix ac ne vix quidem crediderim. Scientiam vero, quae in inueſtiganda rerum materialium natura verſatur, nomenclaturam requirere, quam maxime fixam, ſtabilem atque immutabilem, ſupra iam ſatis eviciſſe nobis videmur.

Caeterum tantum abeſt, vt ea, quae non ſolum experientia duce, ſed ratiociniorum ope cognoſcuntur, quoque ad ſcientiam chemicam pertinere negem, vt potius in ipſis ratiociniis iſtis ingenii acumen, ſagacitatemque chemicorum praecipue cerni, iisdemque ſcientiam noſtram mirifice augeri, perſuaſum habeam. Hoc vnum tantummodo contendere auſim, in fingendis rerum materialium denominationibus, nos minime ratiociniis, quibus eadem nitantur, duci debere.

Et

(*) Sunt tamen nonnulli, qui exiſtentiam eius adeo perſuaſam habeant, vt dummodo acidi illius carbonarii (cuius tanta copiae ineſt terrae calcariae, quae vbique terrarum copioſe deprehenditur,) ſubſtantia oxygenia a carbonaria ſeparari poſſit, eximios ex hac re ad oeconomos praecipue fructus redundaturos, eosdemque materia combuſtibili, alendo igni apta, abundaturos eſſe arbitrentur.

Digitized by Google

Et quem denique fructum ex *eiusmodi* nominibus, internam rerum naturam exprimentibus ad nos redundare arbitremur? Tironem, forſan dixeris, naturam alicuius rei (quam tamen ſemper dubiam atque ambiguam eſſe concedes,) ſtatim perſpectam habere, dummodo vel nomen ipſius, ad indolem rei adcommodatum, memoria complexus fuerit. At vero, quae ex ſolo nomine hauritur alicuius rei notitia, perexigua et nihili fere pendenda videtur. Sic vel ipſa denominatio illa, *acidum ſulfuricum*, quam pro acido vitriolico ſubſtituerunt recentiores, ſtatim docere debet tirones, in acido iſto ſulfur oxygenio iunctum contineri; cuius tamen, ſi vel maxime ita ſe habeat, notitiam ex denominatione oriundam, nondum applicare, et in vſum ſuum conuertere poterit! Quodſi vero tirones vlteriores in arte chemica addiſcenda iam feterint progreſſus, notitiam naturae rerum, etiam absque eiusmodi nomine, eandem exprimente, ſibi iamiam alia ratione comparauerunt. Sed ſi vel maxime concedamus, illos in diſcendis primis ſcientiae elementis, ex eiusmodi nominibus per ſe adiuuandae memoriae praeſidium grauius capere poſſe; re tamen accuratius conſiderata, nouas, easque longe grauiores ediſcendae artis chemicae moleſtias exinde oriundas eſſe, nemo inficias ire poteſt, qui meminerit, chemico, (ſimulac noua nomenclatura excogitata fuerit,) non ſolum nouae huic atque faciliori, ſed etiam antiquiori, eidemque minus aptae terminologiae operam nauandam eſſe; ſiquidem veterum libris, ſecundum antiquiorem loquendi morem conſcriptis, nullo modo ſuperſedere poſſumus. Idem itaque negotium, eademque opera tironi nunc incumbit, quae olim *Scheelii* et *Bergmanni* diſcipulis; et leuamenti loco, quod ei praeſtare animus erat, inſuper accedit noua, recens inuentam praeceptoris, quamuis ſit facillima, et optima, addiſcendi terminologiam. Vide ſupra.

5. Ratio denique quinta, ex argumento ſecundo deducta, quippe ex qua breuiores dicendi formulas, quae facile memoria teneri poſſunt, amplioribus rerum deſcriptionibus praeferendas eſſe ſtatuebamus, recentiſſimum loquendi morem mirifice adiuuare, atque adſtruere videtur. Ante omnia vero hic carendum eſſe putauerim, ne breuiloquentiae inſeruientes, perſpicuitatem parum curae habeamus, ne accidat nobis illud:

— — Dum breuis eſſe laboro,
Obſcurus fis,

id quod tamen recentiori nomenclatura timeri poſſe nobis videtur. Sic breuitatis adiuuandae cauſſa nomina radicalia vario modo flexerunt e. g. phosphorus, phosphoricus, phosphoroſus, phosphoras, phosphoris, phosphoretum, cet. Sed vti haec vocabula non tironi ſolum, ſed etiam vel artis peritiſſimo ſub initium admodum difficilia ſunt intellectu, diſtinctu, adplicatu; ſic etiam ſi ſenſum eorum vel maxime perceperint, colloquendo, audiendo, ſcribendoque facillime, parum attendentes, haec vocabula inuicem permutare poſſunt; vnde tum maximi errores oriundi ſunt. Quod ſi vero ex loquendi more hucusque vſitato, acida variae modificationis, e. g. acidum prius phosphori, (addito epithodo, *purum*, vel eodem etiam omiſſo) alterum autem addito, *phlogiſticum* (vel vt chemicis recentiſſimis non diſpliceamus) imperfectius, inuicem diſtinxeris: ſic etiam pro *phosphis*, e. g. *ſodae* vel potaſſae, modo *ſoda* vel *potaſſa phosphorata*, nec non pro *phosphas*, (ſi diuerſum reuera oriatur tale ſal medium) *ſoda phosphorata phlogiſtica* ſ. imperfectior dixeris, eiusmodi errores, vix ac ne vix quidem extimescenda ſunt (*). Eiusmodi igitur paucorum verborum ambages

(*) Sic ecquidem etiam phosphoretum argenti, vel argentum phosphoro mineraliſatum, vel ſi nondum ſatis breuis videatur haec denominatio, argentum phosphoroſum appellari auſim, vt diſtinguatur ab argento, in acido ſoluto, vel argento phosphorato.

Digitized by Google

ges ferendas eſſe crediderim, dummodo hisce perſpicuitati conſulatur.

Quae cum ita eſſe, argumentis, ni fallor, philoſophicis confirmauerimus, nobis quidem recentiſſima chemicorum terminologia difficultatibus non paucis laborare, hucusque vero chemicis vſitata adeo commoda atque idonea videtur, vt illam cum hac commutandam eſſe non exiſtimaverimus. Sed quamuis in hoc quidem argumento a viris fama celebratiſſimis diſſentiam, merita tamen eorum eximia, piamente veneror, ipſamque operam illam, quam emendandae chemicorum terminologiae eo conſilio nauarunt, vt ſtudium huius ſcientiae, magis magisque adiuuent, laudem non exiguam mereri arbitror. Quid? quod nonnulla vſitatae nomenclaturae vocabula emendentur, atque commutentur, in votis habeam ipſe. Sic e. g. vt vnum e pluribus deſumam, pro vulgari termino hepar ſulfuris ſubſtitui velim potaſſa vel ſoda ſulfuroſa: ſic breuitatis quoque in loquendo atque ſcribendo adiuuandae cauſſa, vocabula quaedam per ſe ſatis perſpicua, ex iſta nomenclatura recipi poſſe arbitrer, ita vt e. g. pro ſal alcali volatile, *amonia*, terra ponderoſa, *boryta*, terra aluminis, *alumina*, terra ſilicea, *ſilica* dicatur (*); dummodo non omnem loquendi morem immutandum eſſe cenſueris.

Antequam tamen differendi finem faciam, quid de diuerſa terminologiae hucusque vſitatae ratione ſtatuam, paucis explicandum videtur. Nimirum cel. *Bergmannus* et plurimi eum

 ſe-

(*) Si quae hucusque diſputata ſunt, principibus in arte chemica viris plane non diſplicuiſſe ſenſerim, animus eſt, perluſtrandi receptos hucusque chemiae terminos, et ea, qua par eſt, modeſtia notare, quae plane incongrua, et ea proponere, quae aptiora mihi videantur.

Digitized by Google

ſecuti, ad deſignandum ſal Gauberi vtuntur voce, *ſoda vitriolata*; quod alii vero rectius vitriolum *ſodae* appellari exiſtimant; quam quidem appellationem ab acidis, vel ſubſtantiis iis, quae acidorum locum tenent, repetitam, etiam nouiſſimae nomenclaturae auctores praeferendam eſſe exiſtimant, quippe qui dicunt, *ſulfis* potaſſae, non potaſſa, ſulfurica. Vter denominandi modus praeferendus ſit, philoſophica rei ipſius contemplatione, niſi certa, probabili tamen ratione, dirimi poſſit neceſſe eſt. Acida quidem et his ſimilia, eam ob cauſſam primo loco, et forma ſubſtantiua nominari videntur, quia comparatione facta cum iis, quae acidis nupta ſunt, e. g. ſalia alcalina, terrae, metalla, efficatiora videntur. Sed fieri etiam poſſe crediderim, vt haec ipſa maior acidorum efficacia inde pendeat, quod elementa eorum non in ſtatu immediatae cohaeſionis, ſed iam phyſice inuicem ſeparata aut diſſoluta, vel ſaltem quouis fluido facile ſolubilia, deprehendantur; terrarum autem nec non metallorum elementa, arctiſſimo nexu inter ſe ipſa cohaerentia: (quae quidem nexus immediati vix obſtat, quo minus in alias res operentur, quoniam affinitas vel attractio partium inter ſe longe maior fortiorque eſt, quam omnes alias ſubſtantias verſus), antea ſe iungi et aliquo modo, aliis inter poſitis ſeparari aut diſſolubilia fieri debeant, priusquam potentiam ſuam in alias ſubſtantias declarare poſſint. Quam quidem opinionem natura acidi phosphorici, ignis vehementia fuſi, probabilem reddit, quippe quod ſub vitri ſpecie fere inſolubile, nec acidum videtur, aciditatem vero curſus prodit ſimulac per carbonum puluerem in phosphorum redactum, comburatur, vel vitrum illud a ſale alcalino diſſeruatur. Quanta ſit efficacia ſubſtantiarum metallicarum, non immediato nexu inuicem cohaerentium, ex multis phaenomenis adparet, ex quibus, vt rem exemplo illuſtrem, ad mortiferam illam vim ſublimati corroſiui prouoco, quae eo magis miranda videri poteſt, cum eadem

acidi

Digitized by Google

acidi quantitas quae lethali hoc mercurio continetur, et ne tanta quidem aquae copia diluta eſt, quam quae ad diſſoluendum ſublimatum requiritur, impune deglutiri poteſt. Vim corroſiuam argenti nitrati, (lapidis infernalis) et emeticam antimonii acetati vel tartariſati, transeundo commemoraſſe ſuffecerit. Quae ſi recte animaduertero, dubium ſaltem atque ambiguum eſſe videtur, vtrum maior, (ſi ad intimam illorum naturam ſpectaueris), acidis, an baſibus eorum, agendi vis tribuenda ſit. Cum vero totam hanc rem his quidem argumentis haud prorſus dirimi poſſe ſentiam; hoc vnum ſaltem contendere auſim; difficile eſſe diiudicatu, quaenam ex commixtis inuicem rebus pluribus efficacior habenda ſit. Miſſis vero iam his a me allatis argumentis, ad alia me verto, eaque ex analogia, quam vocant, linguarum in genere ſpectatarum repetenda.

Nimirum in naturam plurium linguarum europaearum inquirens, incidi in qualemcunque obſeruationem hanc, quam ex philoſophiae principiis facile explicari poſſe arbitrer: in duobus mentis conceptibus inuicem iungendis, *cum*, qui plura obiecta amplectitur, pro praecipuo haberi, et vel per ſolum ſubſtantiuam, vel ſaltem ſi duo ſubſtantiua inuicem nectenda fuerint; per ſubſtantiuum dirigens exprimi, *alterum* vero, paucioribus obiectis competentem, adiectiui vel ſubſtantiui directi locum obtinere. Sic vulgo vrbem hanc vel illam vocant, magnificam, vel metropolin, quia nimirum maior eſt numerus vrbium earum, quae non magnificae ſeu principales ſunt, quam earum, quae ſic vocari poſſunt. Simili modo dicant princeps haeres, (quia plures ſunt principes, in quos non deuoluitur imperium), negotia imperii, magnitudo animi, ſtatio praetoria, et i. g. a. Quod ſi vero hanc loquendi morem, niſi omnibus, plurimis tamen linguis proprium eſſe ſtatuendum fuerit, in termi-

Digitized by Google

minologia etiam chemica recti loquendi arbitrium ad eum deferendum eſſe, nullies dubitauerim.

Et ſic quidem vtramque, de qua ſupra ſermo erat, rerum adpellandarum rationem conſideranti mihi prior, ex qua baſes, (quippe quae plura exhibere poſſunt compoſita, quam acida), forma ſubſtantiui exprimuntur, potior eſſe videtur. Si enim, e. g. combinationes, quas cuprum cum omnibus acidis, ſalibus alcalinis, neutris, mediisque, oleis, nec non cum ſulfure, arſenico aliisque metallis inire poſſit, in mentem diligentius reuoces, longe maiorem ex eo compoſitorum numerum deprehendes, quamſi eadem ſpectaueris, quae acidum quod libet ſigillatim cum rebus aliis, quae eiusmodi coniunctionem admittunr, inire poteſt. Quare cum res eae, quae acidis tamquam baſes ſubſunt, pluribus notionibus formandis anſam praebent, (quia pluribus ſubſtantiis iungi poſſunt) quam acida, methodus etiam ea, quam b. *Bergmannus* in deſignandis rebus compoſitis ſequutus eſt, mihi quidem retinenda videtur.

OBSER-

Digitized by Google

OBSERVATIONS MINERALOGIQUES SUR QUELQUES MONTAGNES VOLCANIQUES DES ENVIRONS DE GÖTTINGUE.

Par BASILE SEWERGUINE.

Préſenté à l'Académie le 8 Juillet. 1790.

Chaque contrée a ſes particularités, & en fait de Minéralogie, ce ne ſont que les obſervations faites ſur differens endroits & ſur les differentes productions du regne minéral, qui nous mettent en état de fixer des verités générales. Car en effet, ce ne ſont que les faits, qui doivent ſervir de baſe à chaque Theorie quelconque, & non ces vaines chimêres, que nous nous formons nous mêmes, ou que nous adoptons mal à propos des autres. Notre ſiecle, ſi riche en projecteurs, en Theoriſtes, en faiſeurs de Syſtêmes &c. en fournit des exemples nombreux, & chaque ſçavant judicieux appercevra bientôt toute la foibleſſe d'une Theorie, toute fois qu'elle ſera fondée ſur ces dernieres, quelque brillante qu'elle paroiſſe au premier coup d'oeil. Ce n'eſt donc pas en vain, qu'on les diſtingue à preſent de celles qui ont un fondement plus ſolide, par un nom bien propre en effet, celui de Romans d'Hiſtoire natu-

Digitized by Google

naturelle. Cependant il y en a de ces genies profonds, qui bien loin de s'amuſer à ces jeux de notre propre phantaſie, contemplent la Nature dans la Nature même, & ne deduiſent les cauſes, que des faits qu'elle leur preſente. Tel etoit Mr. Ferber (*), membre de notre Academie & célébre Mineralogiſte de notre ſiécle, mais qu'une mort trop rapide nous a enlévé ſitôt. Sa gloire eſt générale, & le zéle avec le quel il parcourut les pays étrangers en faveur de la Mineralogie, eſt reſpecté par tout le Monde. Ni les rochers eſcarpés, ni les ſombres forêts, abandonnées ſouvent aux miſerables, qui vivent de la proye de leurs prochains, ni les vagues affreuſes des mers écumantes, rien n'arretoit ſon cours, & tout cela aux dépens de ſes propres frais. Toute l'Allemagne, l'Angleterre, l'Italie, une partie de la France & de la Suiſſe &c. l'ont vû contempler la Nature dans l'endroit même, & qui ne connoit les fruits, qu'il nous en apporta, qui ne ſçait, combien la Minéralogie, la Metallurgie, & même la Phyſique en général en a profitée? Rien n'echappoit à ſon activité & ſon genie pénétrant, & comme il n'epargnoit aucune dépenſe, il perça des endroits, dont l'accés etoit defendu pour tant d'autres. C'eſt par ces moyens qu'il parvint à nous donner les details des Apennins, des montagnes de Derbyſchire & autres en Angleterre, de celles de la Hongrie, de l'Autriche, de la Bohemie, du Bas-Rhin, d'une partie de la France &c. &c. & c'eſt lui, qui nous demontra par des faits non equivoques la regularité, que des chaînes de montagnes affectent, lorsqu'elles traverſent des grandes regions. Mais ce n'eſt pas là l'endroit, ou je me puis-

(*) Cette diſſertation ayant été lue juſtement à l'arrivée de la nouvelle de la mort de ce celebre Mineralogiſte, l'auteur a cru devoir faire cette digreſſion, pour donner place à cette foible expreſſion de l'eſtime qu'on lui doit.

puiſſe trop étendre ſur un objet, ſi digne d'ailleurs d'être preſenté dans tout ſon luſtre. Je n'ai voulu, que temoigner mes reconnoiſſances pour les fruits, que j'ai eu le bonheur de tirer de ſes ecrits, ſans l'avoir connu perſonnellement. Je reviens maintenant au but, que je me ſuis propoſé.

* * *

Ces montagnes ſituées à une lieue & demie de la ville de Göttingue, près d'un petit endroit nommé Dransfeld, ſont du nombre de celles, qui nous montrent dans un très petit eſpace de lieu, les produits de la Nature les plus differens. Des Baſaltes, des Laues, des Petrifications & bien d'autres encore ſous des formes les plus differentes ſont les corps, que l'on y trouve presque à chaque pas. Cependant les montagues mémorables, que j'ai obſervées, ne ſont qu'au nombre de trois, dont je vai donner ici la deſcription; (*) c'eſt le Dransberg, le Seſebeutel & l'Ochſenberg, toutes trois ſituées près du village dejà mentionné ſur la chauſſée entre Göttingue & la petite ville nommée Münden.

Dransberg.

C'eſt une montagne conique & iſolée, qui eſt ſituée tout près de Dransfeld, à la main gauche de la chauſſée. Elle

(*) Le celebre Mr. de Luc (dans ſes lettres phyſiques & morales ſur l'homme &c. adreſſées à ſa Majeſté la Reine de la grande Bretagne), & Mr. le Docteur Brandis de Hildesheim (Göttingiſcher Magazin, 4. Jahrgang. 1. St. 1785.) en ont dejà donné la deſcription, mais comme j'y trouve pluſieurs choſes tout à fait omiſes, & autrement decrites, que je ne les ai trouvées depuis, ces montagnes m'ont parues meriter d'etre decrites encore une fois.

Digitized by Google

eſt difficile à monter, & elle eſt compoſée de Baſalte, que l'on en exploite pour paver les chauſſées. La plûpart de ce Baſalte préſente des prismes à 3 — 4 pans quelquefois des pyramides, ou des coins, ou des doubles piramides & des boules. Les pans des prismes ſont inégaux; il y en a, qui ſont larges d'une demi aune, & d'autres ſeulement de deux pouces. J'ai même obſervé, que le Baſalte en général y eſt de deux ſortes, l'un affecte toujours une forme prismatique, l'autre n'a qu'une figure indeterminée, au quel appartiennent, ſelon moi, même les Baſaltes en piramides & en coins, qui ſont généralement entaſſés parmi ce dernier. Au reſte ce Baſalte de figure indeterminée n'occupoit que les endroits plus proches de la ſurface de la Montagne, tandis que les Baſaltes reguliers rempliſſoient l'interieur même de la Montagne & formoient des grands prismes, dont les pans avoient quelquefois une aune & demie de largeur. Ces prismes etoient diviſés l'un de l'autre dans une direction un peu inclinée a l'horizon, & il y avoit des articulations longues d'une aune, mais toujours, autant que je l'ai pu remarquer, planes par les deux ſurfaces. Les boules etoient très petites, ordinairement de la groſſeur d'un oeuf de pigeon, ou quelquefois un peu plus grandes. On m'a aſſuré, qu'on les trouvoit ordinairement dans les jointures des prismes & qu'elles etoient arrangées l'une auprés de l'autre en forme du Paternoſter des Moines. Quant à moi, je ne les ai vues, qu'eparſes ça & là ſur le ſol de la carriére.

Les interſtices des prismes de Baſalte etoient remplis d'argille melée de Sable, & de couleur brune rouſſâtre. Elle ſert même toujours d'enveloppe au Baſalte & s'en degage enfin en manière d'ecorce.

Le

Le ſommet de la montagne etoit couvert de terreau, qui avoit jusqu'a 2 pouces d'epaiſſeur. Le pied eſt garni en plus grande partie du bois de hêtre (Fagus ſilvatica).

Le ſol de la carrière etoit couvert de lave poreuſe jaunâtre qui etoit presque entierement decompoſée & tendre au point de s'egrener entre les doigts.

Mais ce qui rend cette montagne bien remarquable encore, ce ſont des grands blocs d'une ſorte de pierre quarzeuſe epars ça & là ſur les flancs de la montagne & dont je parlerai plus bas. Le pied de la montagne etoit couvert de ſable quarzeux, & plus loin il y avoit des couches minces de pierre à chaux, contenant des Trochites. Le ſommet avoit la forme d'un plateau, couvert de gazon.

Seſebeutel.

Celle ci eſt poſée presque vis à vis de la premiere, de cette coté du village. La carrière d'où l'on tiroit le Baſalte etoit tout au ſommet de la montagne; mais le Baſalte y etoit deja preſque entièrement enlevé, & ne repreſentoit plus ces belles colonnes, que Mr. le D. Brandis decrivit autrefois; (*) on n'y trouvoit, que la lave bleuâtre, qui ſervoit de baſe au Baſalte. Cette lave me ſembloit preſenter deux variétés differentes, car elle etoit entièrement compacte plus haut, & la couche inférieur etoit crevaſſée de petits trous, remplis ſouvent d'une matière jaune luiſante, dont je parlerai plus bas.

Au reſte cette montagne eſt bien large & contient des couches calcaires melées de Trochites à ſon pied. Même

 tout

(*) S. Götting. Magazin, 4. Jahrg. 1. St. p. 143.

tout l'eſpace entre ces deux montagnes contient de ces couches calcaires parſemées de debris roulés de pierres calcaires, de Baſaltes, de Quartz, etc.

Ochſenberg.

La montagne d'Ochſenberg, qui eſt ſituée à la main droite de la chauſſée, près du village nommé Ochſenfeld, en eſt plus eloignée. Mais c'etoit toujours le Baſalte, qui conſtituoit ſa principale maſſe, dont on ne pouvoit cependant pas determiner la poſition, parceque la carrière d'où l'on le tiroit etoit toute comblée de debris de pierres que l'on en avoit detachées. Ceux cependant que j'y ai trouvés n'avoient pas cette figure de prismes reguliers, mais paroiſſoient plutot en maſſes plus ou moins rondes irregulieres. Entre autres j'y ai trouvé du Baſalte bleuâtre, mais il eſt râre, & le Baſalte avoit ici ordinairement la même couleur de brun noirâtre, que celui des montagnes précédentes. On trouvoit au pied de la montagne des couches de pierre calcaire & du coté du ſud il y avoit ces remarquables blocs de Pierre de corne eparſe cà & là, & même par tout le chemin, qui mêne vers cette montagne, dont je parlerai plus bas. Du coté de l'eſt il y avoit vis à vis de cette montagne, une autre petite montagne nommée Bourg, qui affectait parfaitement une figure conique, & contenoit auſſi du Baſalte. Une vallée profonde, où l'on trouve un petit village nommé Bourg, les diviſe. Au reſte la lave que j'ai trouvée parmi les blocs de Baſalte, etoit de trois ſortes, que je vais decrire bientôt.

De-

Digitized by Google

Deſcription des differentes eſpéces de pierres trouvées aux environs du village de Dransfeld.

1.) Lave poreuſe bleuâtre parſemée de petits points de couleur d'orange tres friable.

2.) Lave compacte bleuâtre, parſemée de petits points blancs; un peu plus dûre, que la precedente.

3.) Lave poreuſe griſe avec des points blancs très friable. Toutes les trois d'Ochſenberg.

4.) Lave decompoſée en une Argille jaunâtre, de Dransberg.

5.) Lave poreuſe bleuâtre pleine de paillettes luiſantes, ſpathiques & jaunatres. — Très remarquable en effet; car comment ces petits ſpaths ont ils été formés? Eſt ce dans le tems même, que la Lave etoit encore fluide, ou après ſon refroidiſſement? Dans pluſieurs trous de la lave je n'ai trouvé ſouvent qu'une terre friable jaune. Mais cette terre eſt elle un reſidu de quelque ſubſtance cryſtalline decompoſée, ou eſt ce la ſubſtance même, d'ou ces cryſtaux ont été formés? ou encore cette terre n'eſt elle pas un réſidu de quelque ſubſtance vitrifiée, que l'eau & l'air diſſout après, & depoſe enfin en ces petites maſſes ſpathiques? Quant à moi, je ferai tenté de ſouſcrire à cette derniere conjecture, car la friabilité & la poroſité de la lave prouve, que l'eau a bien pû la penetrer, ainſi que, ſelon moi, toute fois que l'eau n'a pu la penetrer, la terre reſta inalterée ou s'en degagea même, en laisſant les trous vuides qu'elle occupoit auparavant.

6.) Baſalte contenant une ſubſtance blanche probablement vitrifiée par le feu de volcans, & qui donne des etincelles avec le briquet.

7.)

Digitized by Google

7.) Baſaltes en petites boules contenant une ſubſtance verte vitrifiée & qui ſe decompoſe.

8.) Baſalte noir inegal, & luiſant dans l'endroit de la fracture.

9.) Differentes varietés de Baſalte, contenant des vitrifications noires, vertes, rouges, ou blanches, en forme de points, de grains, ou de lamelles &c.

10.) Baſalte de couleur brun foncé, contenant de petits cryſtaux de couleur jaune verdâtre & en forme d'aiguilles. Ces cryſtaux ont été formés probablement par la voye ſeche. Cependant il faut, ce me ſemble, diſtinguer deux ſortes de ces cryſtaux dans les productions volcaniques, les uns, qui ſont vraiment des produits du feu, & d'autres, qui ſe forment par une diſſolution reïterée par la voye humide, après le refroidiſſement de la lave, comme je l'ai dit au N°. 5.

11.) Suivant la face extérieure j'y ai trouvé des priſmes, des pyramides, des coins & des boules. Au reſte le Baſalte avoit toutes les proprietés, que les Naturaliſtes qui l'ont conſideré en Italie ou au Bas-Rhin lui attribuent.

12.) Grés de couleur rougeâtre, avec des paillettes de Mica blanc. Les petits grains de ſable ſemblent être lies enſemble par une ochre ferrugineuſe. Il donne du feu avec le briquet, qui en detache en même tems quelques parties friables. Au pied de Dransberg.

13.) Grés, que les acides attaquent avec efferveſcence, pour preuve, qu'il contient des parties calcaires.

14.) Sable blanc & très fin. Au pied de Dransberg.

Digitized by Google

15.) Grés brun rougeatre dont la face exterieur eſt unie & un peu luiſante, & comme ſa couleur eſt de brun rougeatre, il imite par là aſſez bien l'hêmatite. Prés de Dransberg. D'ailleurs on le connoit ſous le nom de Baſalte rouge.

16.) Grés blanc & d'un tiſſu trés fin, qui au lieu d'avoir la face ordinaire de grés, a une ſurface unie & egale, comme s'il y etoit demivitrifié. Au pied de Dransberg.

17.) Des grands blocs de pierre quartzeuſe, compacte & luiſante, de couleur blanche, jaune ou rougeatre. Les differens degrés de ſolidité & d'eclat de cette pierre, ainſique ſa face entiere et les circonſtances du lieu ont engagé quelques Naturaliſtes de regarder ces blocs comme des grés vitrifiés par le feu des volcans. (Götting. Mag. 4. Jahrg. 1. St. 1785.) Cette ſorte de grés que j'ai decrite au N°. 16. le ſable, & les pierres de ſable que l'on trouve repandues dans toute la contrée depuis le pied de Dransberg jusqu'à Münden & plus loin encore, rendent cette conjecture encore plus probable.

18.) Pierre calcaire compacte remplie de Trochites, au pied de Dransberg & de Seſebeutel.

19.) Pierre de corne jaune, trouée, avec des cavités remplies d'une matiere noire, peu luiſante & diſpoſée presque en forme de Dendrites. Une production très remarquable en effet, que j'ai trouvée en allant de Dransberg à l'Ochſenberg. Je ſuis bien porté pour la regarder comme du Baſalte; du moins elle en a la face exterieure. Et dans ce cas, comment pourrions nous douter encore, que les Baſaltes ne ſoyent des productions de volcans, car comment pourroit il autrement remplir toutes les crevaſſes & les trous de la pierre de corne?

 20.)

20.) Pierre de corne avec des fleurs probablement de cobolt, de couleur de Roſe. Au pied de l'Ochſenberg.

21.) Pierre de corne trouée avec des empreintes de Trochites. Au pied d'Ochſenberg.

22.) Pierre de corne contenant des trochites petrifiées en une pierre calcaire. Elle eſt pleine de crevaſſes qui ſont garnies de petits criſtaux piramidaux de ſpath calcaire. Au même endroit.

Au reſte les Pierres de corne avoient ordinairement une couleur jaunâtre, mais plus ſouvent rouge: elles donnent du feu avec le briquet, & ce qui eſt très remarquable, elles etoient toujours criblées de trous & pleines de crevaſſes.

Theorie.

Il n'y a presque aucun doute, que les Baſaltes doivent leur origine au feu volcanique, car quoiqu'en diſent les adverſaires, nous en avons des preuves concluantes. C'eſt pourquoi je me diſpenſe d'en traiter içi, & propoſerai plutôt mes conjectures ſur la formation des pierres de corne de ces contrées. Car d'où viennent ils ces blocs diſperſés de la Pierre de corne? Pourquoi eſt elle briſée & eparſe? Quelle eſt la cauſe de ſa forme trouée & rongée? Les Trochites petrifiées comment ont elles pu y être gravées ou même entierement enveloppées? En un mot, je preſume, que l'eau & le feu y ont agi de concert, & que ces deux élémens exércerent leurs forces, ou dans le même tems, ou bientôt l'une après l'autre. Leur ſituation déréglée, leurs trous & leurs fiſſures ſemblent indiquer, que le feu y avoit agi, & dans un tems, où la pierre etoit encore molle, c'eſt à dire bientôt après, qu'elle a été depoſée par les eaux, car

le

Digitized by Google

le feu à peine ſeroit-il capable d'alterer ainſi la forme d'une matiere entierement endurcie & petrifiée. Et de là je conclue encore, que peut etre même pluſieurs de ces montagnes volcaniques ne commencèrent à exiſter, qu'après cette inondation univerſelle, dont nous voyons autant d'indices ſur la ſurface de notre globe, & que cette même inondation etoit cauſe peut être de pluſieurs éruptions ſouterreines. Car c'eſt presque prouvé par des faits non equivoques, que ce ſont les pyrites en effloreſcence, qui ſont la premiere ſouree de la chaleur exceſſive ſouterreine, qui fait vomir les volcans. Mais les pyrites ne tombent en effloreſcence, qu'après qu'une partie de leur phlogiſtique ſe ſoit degagé, & que leur acide affoibli commence à agir ſur le fer, qu'elles contiennent. Et ce n'eſt que par le concours de l'air & de l'eau, qu'elles ſubiſſent ce changement. Je pourrai citer ici l'autorité d'un celebre naturaliſte françois (*) qui nous dit en ces propres paroles: „ il ſeroit „ à ſouhaiter auſſi que les bouches des volcans fuſſent à l'abri de la pluie, car l'on a vu des volcans, qui après avoir „ ceſſé pendant longtems de jeter du feu, ont recommencé à „ faire des exploſions terribles occaſionnées par de nouvelles „ eaux, qui y etoient tombées „. & un peu plus haut „ ces „ feux, dit il, ſont excités par l'air & la force en eſt redoub„ lée par l'eau. „ (**)

Si l'on conſidére à préſent les enormes maſſes de Baſaltes & de Laves proprement dites, qui occupent une ſi grande partie de l'Allemagne, de la France, de l'Italie, d'Irrlande même &c. &c. & qui nous prouvent clairement, que le feu y avoit jadis exercé ſes forces, à peine aura-t-on quelque

 doute

(*) Valmont de Bomare dans le Dictionnaire d'hiſtoire naturelle T. XII. p. 193.

(**) A l'endroit cité p. 189.

Digitized by Google

doute encore, qu'aucune autre cataſtrophe n'auroit pu être cauſe de tous ces volcans qui occupent un eſpace ſi conſiderable de notre globe, que celle d'une inondation univerſelle. Et voila comment je m'explique ce phenomêne. Ces eaux qui ont ſejournées jadis ſur la ſurface de notre globe, miſes à ſec depuis devoient néceſſairement ſelon leur nature faire des fiſſures, des trous ou même des cavernes entiéres, d'ou elles pénétrerent juſqu'au ſein de la terre, en y introduiſant en même tems l'air de notre Atmosphère, deux élémens qui ſont ſi neceſſaires pour que les pyrites tombent en effloreſcence, comme je l'ai avancé plus haut. Peu à peu la chaleur des pyrites augmenta, & comme c'eſt ſouvent le cas, que les bitumes & quelques mines d'Alun &c. ſe trouvent près de ces ſortes de Mineraux, ceux ci s'emparerent du feu voiſin, & s'enflammerent enfin à l'approche de l'air athmosphèrique. Et de là augmenta la chaleur a un point que même, [ce qui m'eſt très vraiſemblable] pluſieurs airs que l'on nomme dans nos jours factices, commencêrent à ſe degager des corps où ils etoient enveloppés. Et voila l'embraſement parvenu a tout conſumer, car qui ne connoit les forces de l'air dephlogiſtique par exemple pour ſoutenir le feu, & encore pour faire fondre les mineraux les plus refractaires? Enfin plus les cauſes augmenterent, & plus les effets devinrent grands. L'air commun commença à ſe dilater, & les vapeurs à exercer leurs forces terribles. Tous les deux, dans les efforts, qu'ils firent, ſoulevêrent & culbutêrent les couches à peine depoſées par l'eau, & jetterent enfin la matière fondue par les différentes ouvertures, qu'ils produiſirent. Et c'eſt ainſi que le feu ſouterrein a pu rompre & diſperſer les couches de pierre de corne, que les eaux avoient à peine depoſées, en lui donnant en même tems par une forte exſication la dureté qu'elle a. Mais comme la condenſation etoit ſubite,

c'eſt

c'eſt ſelon moi, la cauſe des trous & de la forme rongée de cette pierre. J'ai dit plus haut, que la plupart en eſt de couleur rouge ou rougeatre, & comme la plus conſiderable partie conſtituante de cette éſpéce de Pierre de corne (Petroſilex) eſt la terre argilleuſe ferrugineuſe, c'eſt ſelon moi, une preuve de plus, qu'elle a dû ſa formation au feu ſouterrein. Cependant je ſuis bien éloigné de le ſoutenir comme une verité prouvée, & encore moins de le fixer comme un fait general. Ce ne ſont que des ſimples conjectures, que m'ont fait naitre les circonſitances, ou j'ai trouvé ces montagnes memorables, qui m'ont parues d'autant plus meriter d'etre decrites ici, que le ſavant Naturaliſte romain dit: *in contemplatione Naturae nihil poteſt videri ſupervacuum.*

DE TELA DICTA CELLVLOSA OBSERVATIONES CONTINVATAE: CVTIS, SVBSTANTIA SVBCVTANEA, ADEPS.

Auctore

C. F. WOLFF.

Conuent. exhib. die 16 Sept. 1790.

Par ſubcutaneae et intermuscularis ſubſtantiae celluloſae natura eſt. Pariter continua illa atque haec, pariterque aequalis, ſemifluida, tenax, ſubpellucida ſubſtantia eſt, poris cellisque aut filis et lamellis, partibusque quibusuis determinatis, quibus conſtaret, omnino deſtituta, tractilis tamen, vti quae musculis intercedit, et facile in varias formas ductilis.

Transtuli paruam huius, quae adipem inter et musculos haeret, ſubſtantiae celluloſae portionem, ex brachio hominis macilenti promtam, orbiculo vitreo impoſitam, ſub microſcopium; vt contra lucem, a ſpeculo reflexam, pellucidam viderem. Aequalis, continua, ſemifluida, quaſi gelatinoſa, et cryſtalli inſtar pellucida (a) ſubſtantia apparuit. Hinc inde molecu-

(a) Tab. VI. fig. 1. a. a. a.

leculae adipis, aggeres veſicularum minimarum, adipem continentium, ſe repraeſentabant. (a) Inter eos aggeres clara tenuis gelatinoſa ſubſtantia fuit. Haec horſum iſtorſum in variasque directiones facile extendi ſeſe, et elongari, et in formas quascunque pro lubitu, duci patitur (b). Si acubus vero duabus exiguam particulam huius ſubſtantiae ſub microſcopio ſuper orbiculum longius paulisper diſtraxeris, mirum eſt, quam pulchra nitidaque cryſtallina, eaque tenerrima, filamenta retiformia oriuntur (c); vt hac teneritate et elegantia, qua ſub microſcopio apparent, pictura reddi minime queant. Haec, ſi transuerſim traxeris ſubſtantiae portiunculam, transuerſa ſunt, quae oriuntur, tenuiſſima filamenta retiformia, areolis incluſis oblongis rhomboideis. Eandem ſubſtantiae partionem, ſi denuo ſecundum longitudinem extendas; filameuta priora confunduntur, delentur; ſubſtantia confluit; noua producuntur filamenta, pariter retiformia, areis pariter rhomboideis incluſis, ſed ad longitudinem ducta. Facile ex his omnibus vides, ſemifluidam, tenacem, pellucidam ſubſtantiam, eamque ſua natura continuam eſſe, quae confluit, aut facile potius cohaeret, quae in omnes formas facile duci poteſt.

Accidit, cum haec experirer, vt aere in ſubſtantiam, varie agitatam, ingreſſo, bullae quaedam aereae formatae in extenſa ſuper orbiculum celluloſae portione ſe repraeſentarent ſolitariae, haud minimae, rotundae (d). Has facili negotio acu ex loco ſuo in ſubſtantia, quantum lubuit, promouere, iterumque repellere, vnamque maiorem in duas, tres, vel quatuor, mi-

(a) fig. 1. e. e.
(b) fig. 1. b. b. b. c. c.
(c) fig. 1. d.
(d) fig. 1. f. f. f.

Digitized by Google

minores, at ſemper rotundas, diuidere, denique duas aut plures minores in vnam maiorem congerere, vt confluerent, potui. Facile apparet, has bullas non cellas fuiſſe, natura formatas, conſtantes, quae promoueri in ſubſtantia, in qua formatae eſſent, diuidi in duas aut tres minores, ſeparandas, a ſe mutuo diſpellendas, iterumque congeri, in vnam vt confluerent, minime potuiſſent.

Adipis veſiculas probabile eſt ſimili atque bullas aereas modo eſſe formatas. Adeps fluidus tunicas arteriarum penetrans, vbi exſudat, guttatim collectus, nonniſi continuam vbique reperit ſemifluidam cuicunque impreſſioni facile cedentem, ſubſtantiam, in eamque guttulis minimis deponitur. Tunicas ergo proprias, a reliqua celluloſa dicta ſubſtantia indole et natura diuerſas, veſiculae non habent. Qua parte tamen aut eminent alicubi, aut ſibi mutuo contiguae accumbunt, parietes omnino tenuiſſimos eo magis exhibent, quo ob tenacitatem ſuam in incredibilem tenuitatem ſubſtantia facile efflari ſe ſinit; vt quamuis tenuis v. gr. iam fuerit veſiculae alicuius paries, in huius tamen ſubſtantia circumquaque nouae guttulae ſe inſinuare, ſubſtantiamque porro extendere, nouasque formare veſiculas poſſint. Inde ſi macileſcentia adeps depoſitus extrahitur; veſiculae non collabeſcunt, ſed confluit omnino in continuam ſemifluida ſubſtantia, continuamque vniformem et pellucidam denuo refert. Imo in corporibus morbo confectis ipſa, adipe exhauſto, celluloſa dicta, aquoſis particulis humectata, tenacitate naturali fracta, abſorberi incipit, quod quidem ſi putes ſemifluidam inorganicam et continuam ſubſtantiam eſſe, quin fieri poſſit, nihil eſt quod obſtat. Omentum, quod araneae inſtar tenue in cadaueribus plerumque reperiri ſolet, tres digitos transuerſos craſſum in homine obeſo et ſano, violenta morte peremto, reperi. Talis ergo naturalis omenti conditio

eſt.

eſt. Hoc eo vsque morbis aut macilescentia extenuari poteſt, vt ad nihilum fere reducatur. Nam araneae non modo tenuitatem omentum ſaepe habet, ſed foraminibus plurimis quoque pertuſum omnino et areolis inter vaſa prorſus deficientibus reperitur; vt omnis adeps ergo omnisque celluloſa et ipſae laminae a peritonaeo productae, quae adipem illum et celluloſam continent, abſorbeantur. Haec fieri non poſſe opinor, ſi celluloſa omnino ſolida et organica textura eſt, ſi adipis veſiculae porro propriis pelliculis gaudent a celluloſa diuerſis.

Si ſectionem cutis tenuem cum epidermide et cum ſubiecto adipe (a), quaeque porro ad musculos vsque ſequuntur, microſcopio, lumine ſimpliciter ab obiecto reflexo, perluſtres; haec, quae continuo dicam, ſtrata diuerſa facile diſtinguuntur. Quo tenuiorem harum ſubſtantiarum ſectionem habeas, eo quidem commodius ſub microſcopio ſectio tractari eoque facilius obſeruari poteſt. Quam deſcribo, quamque figura ſecunda et tertia exhibeo, ex brachio hominis non obeſi promta eſt. Prima epidermis (b) eſt, cuius, quod adhibui, et quo fere in reliquis vſus ſum, microſcopio craſſities dimidiae lineae ferme aequalis apparuit, quae admodum tenuis ergo in hac brachii parte exiſtit. Sequitur cutis (c), quam quintuplo quaſi epidermide craſſiorem in parte eadem aeſtimo. Haec non ſenſim ſenſimque, vti credideram, et quam communem puto eſſe opinionem, in ſolitam, quae adipem continet, quaeque musculos inuoluit, celluloſam laxior abit; ſed excipit cu-

(a) fig. 2. 3.
(b) fig. 2. a. a. fig. 3. a. a. b. c. d.
(c) fig. 2. b. b. fig. 3. e. e.

Digitized by Google

cutem diſtinctum a cute, diſtinctumque a celluloſa, ſubſtantiae ſtratum (a), quod mediae quaſi inter cutem et celluloſam naturae, at duplo ſaltim cute craſſius eſt. Cutis per omnem ſuam ſubſtantiam, exterius interiusque, eandem denſitatem eandemque firmitatem habet, neque laxior aut mollior aut ſolubilior ſenſim in ſtratum illud ſubcutaneum abit. Sub hoc ſtratum adeps collocatus eſt (b), ex moleculis fere rotundis, ſeu glebis in homine conſtans, quas porro veſiculae, fluidum continentes, in aggeres congeſtae, efficiunt. Deinde adipis, aut celluloſae, ſtratum ſequitur, quod meritò tunicam adipoſam dicas, ab adipe mero, in moleculas congeſto, diuerſum, tenacius illo et magis tractile, verbo plus celluloſae dictae ſubſtantiae, minus veſicularum, proportione illius, quam merus adeps continens. A tunica adipoſa communis demum, quae ipſos musculos tegit, eosque et fasciculos et fibras eorum inuoluit, celluloſa continuatur.

Cutis, quam proprie ſic dicas, quae quintuplo aut ſextuplo epidermide craſſior eſt, (c) tenax, dura et denſa ſubſtantia eſt. Nimirum difficilius extenditur et ſibi tum remiſſa elaſtica ſe reſtituit. At ductilitatem vix vllam habet. In his proprietatibus epidermis cutem etiam ſuperat. Durior eſt cute et denſior et tenacior. Nimirum extendi prorſus non poteſt, quin rumpatur, et recte mihi a nonnullis cornea dicta eſſe videtur. Ductilitatem omnino nullam habet. Haec cutis caeterum pariter atque epidermis continuae omnino ſubſtantiae ſunt. Nulli in iis pori, interſtitia nulla, multo minus quidquam celluloſi apparet. Minus tamen aequalis, minusque clara aut pura et vnifotmis ſunt, quam celluloſa, ſubſtantia. Quin gra-

(a) fig. 2. c. d. c. d.
(b) fig. 2. e. f. e.
(c) fig. 2. b. b.

Digitized by Google

granula quaſi, non congeſta, nec congregata, ſed potius diſperſa in cute aeque ac epidermide obſeruantur (a). Granula haec obſoleta, neque omnino diſtincta, nec accurate ſatis circumſcripta apparent; certa tamen ſunt, et in cute, contra lucem nonnihil pellucida, pariter atque in opaca viſa, facile deprehenduntur. Imo ſi a latere cutis conſpicitur, eminere ex ſuperficie eius externa manifeſto obſeruantur (b). Quamuis valdopere differant a veſiculis adipis; tamen analogi quid earum illis ineſſe veriſimile eſt; vt non tam vera grana, quam potius ſpecies veſicularum eſſe videantur. Alba caeterum ſunt, vti cutis ipſa, cum adipis veſiculae in homine adulto nunquam non flavae appareant. Videntur etiam aliquanto minora eſſe veſiculis illis, et obſoleta, limitibus minus diſtinctis circumſcripta, vbique obſeruantur. Cutis celluloſa multo minorem etiam pelluciditatem habet. Vt ſolidior ergo, durior, firmiorque et denſior, magisque opaca, quam celluloſa, ſubſtantia ſit.

Stratum ſubſtantiae, quod cuti ſubiectum eſt (c), medium natura ſua inter cutem et celluloſam, adipem continentem, conſtitutum eſſe videtur; vt cutis tamen naturae propius accedat. Neque inſigniter eum errare putauerim, qui ad ipſam cutem totum ſtratum referret; modo omnino diuerſam, quam continuo exponam, ſtrato ſubcutaneo et cuti propriae, quam deſcripſi, naturam, et cutem contra exterius interiusque et per omnem ſuam ſubſtantiam prorſus ſibi ſimilem eſſe, memineris. Stratum, quod cute duplo craſſius eſſe dixi, ſi accuratius conſideratur, in duo porro ſtrata diſtinctum eſſe inuenitur

(a) fig. 2. c. fig. 3. f. fig. 4.
(b) fig. 3. g. g.
(c) fig. 2. c. d. fig. 3. h. i.

tur (a), quorum vtrumuis craſſitie cuti fere aequale, interius tamen exteriori aliquanto craſſius eſt. Singulis proprietatibus ſuis exterius cuti propius aliquanto accedit, interius celluloſae. Vt, ſi ad cutem haec ſtrata referas, tria huius ſtrata ſint numeranda, quibus gradatim quidem, non ſenſim ſenſimque, cutis in hanc, quae adipem continet, celluloſam tranſeat. Et magis quidem multo propria cutis, ſeu ſtratum extimum, a medio, quam hoc ab infimo, differt. Aliqua igitur firmitas atque durities in exteriori horum ſtratorum obſeruatur, qua inſigniter a communi celluloſa differat, qua cutis naturam affectare videatur; at longe tamen a cutis duritie atque tenacitate et firmitate diſtat. Extendi enim omnino, facile etiam, poteſt, et poteſt in fila, ſed nonniſi breuiora craſſioraque, extendi (b). Si porro trahere pergas, vt longiora tenuioraque fila fiant, ſubſtantia rumpitur. Tenacitatem ergo et ductilitatem aliquam, quam cutis nullam habet, poſſidet omnino, ſed longe minorem quam celluloſa. Stratum interius etiam exteriori duritie et firmitate cedit, ſed ductilitatem ideo maiorem non habet, quin niſi craſſa breuiaque fila (c) duci ex eo minime poſſunt. Vtrumque ſtratum maiorem quam cutis, minorem quam celluloſa, pelluciditatem poſſidet. In his ſtratis haud magis quam in cute pori aut cellae aut interſtitia vlla inueniuntur; at grana ſimilia cutaneis omnino apparent (d). Ea minus quidem quam in cute obſoleta ſunt. Rotundiora limitibusque accuratius circumſcripta facilius diſtinguuntur; non tamen eo vsque vt cum adipis veſiculis comparari poſſint. Neque ſtipatae, vt adipis veſiculae; ſed diſperſae, velut in cute, et rariores obſer-

(a) fig. 2. c. d. fig. 3. h. i.
(b) fig. 3. k.
(c) fig. 3. l.
(d) fig. 2. n. fig. 3. h. i.

Digitized by Google

ſeruantur. Verum, vti adeps, tamen in moleculas ſeu glebas, easque compreſſas (a), vniuerſa ſtratorum ſubſtantia diuiſa eſt, et granula quamuis rariora in aggeres tamen omnino congeſta et congregata inueniuntur. Superant rotunditate grana ſtrati inferioris ea, quae in ſuperiori continentur. Si fila ex illo ducuntur, granula in ipſis filis conſtant, et fila ſaepe inaequalia illis et moleculoſa euadunt (b). Conſtantiora ergo grana ſtrati inferioris ac firmiora eſſe videntur. Imo, vti alba eſt ſubſtantia ſtrati ſuperioris, veluti cutis, et pellucida; ſtrati inferioris granula pariter atque vniuerſa ſubſtantia in flauescentem colorem vergunt. His omnibus indiciis inducor, vt credam, ad adipis naturam accedere ſubſtantiam huius ſtrati, in eamque quaſi tranſire. Quod ſi verum eſt, nullum dubium eſt quoque, quin et quae grana in ea eſſe videntur flauescentia verae ſint veſiculae, non adipem quidem merum, at mucilaginoſum quid tamen, oleoſis vel adipoſis particulis mixtum, continentes. Atque ſic ſtrati quoque exterioris grana, quae parum ab illis differunt, modo vt minus in flavum vergant, et ipſa denique cutis granula veſiculae erunt, lentam aliquam materiam continentes. Sic in adipem potius, aut in adipoſam ſubſtantiam, quam in celluloſam communem, vt vulgo putatur, cutis, idque gradatim, non ſenſim ſenſimque, abit.

Adeps glebis conſtat, vti notum quidem eſt, fere ſubrotundis, diſcretis rarioribusque, veſiculis ſolitariis interſperſis, vbi parcior eſt (c); vbi copioſior, contiguis et arcte compresſis (d); vt lineis tantum obſcurioribus, varie inter ſingulas

 gle-

(a) fig. 2. m.
(b) fig. 3. l.
(c) fig. 1. e. e.
(d) fig. 2. e. e.

Digitized by Google

glebas ductis (a), limites earum oculo armato diſtinguantur, glebaque a gleba discernatur. Sic res ſe habet in ſubcutaneo adipe. Prorſus ſimili modo ſuis moleculis ſubſtantia ſtratorum ſubcutaneorum conſtat (b), ſimilibus lineis obſcurioribus ſimiliter ductis (c), ſimili modo diſtinctis; vt vel ſola hac proprietate ſimilitudinem aliquam eſſentialem inter ſubſtantiam illam et adipem eſſe ſtructurae reſpectu, facile intelligas. Vbi exteriora verſus adipis ſtratum terminatur, ſuperficies ei a glebis, quibus conſtat, eminentibus paſſim, inaequalis eſt (d). Similis ſtrato interiori et exteriori ſubcutaneo, et qua extrorſum (e) parte et qua introrſum (f) ſpectant, et ipſi, qua introrſum reſpicit, cuti (g), ſuperficies eſt. His cutis exteriori ſtrato ſubcutaneo, hoc ſtratum exterius interiori, interius adipi ea ratione incumbunt, eaque ſunt applicata, vt eminentibus partibus ſuis altera alterorum partibus excauatis exacte reſpondeant; vt omnia haec ſtrata, cutis, ſubcutanea ambo et adeps vnum quaſi continuum efficere videantur. Quo eo magis apparere exiſtimo, eas ſubſtantias, ſibi mutuo ſubſtratas, tam ſtructurae quam naturae reſpectu gradu tantum a ſe inuicem differre.

Veſiculas adipis veras veſiculas eſſe, pelliculis ſuis tenuiſſimis conſtantes, continentes materiem adipoſam, eaque ratione in celluloſa ſubſtantia continua et ſemifluida ortas, vt gut-

(a) fig. 2. g.
(b) fig. 2. c. d.
(c) fig. 2. m.
(d) fig. 2. i.
(e) fig. 2. k. k.
(f) fig. 2. i.
(g) fig. 2. k. k.

Digitized by Google

guttatim depoſita in ea materies adipoſa caueas impreſſerit ſubſtantiamque in tenues pelliculas extenderit, ſic nidos quaſi ſibi parauerit, et adipis formauerit veſiculas, certum eſt. Succeſſit mihi aliquoties, vt, comprimendo veſiculam, hanc ruperim, pelliculamque et materiam contentam fluidam manifeſto diſtinxerim. Veſiculas a ſe inuicem ſeparare difficile eſt ob tenacitatem partim ſubſtantiae, qua veſiculae et conſtant, et inter ſe cohaerent, partim ob ipſam veſicularum paruitatem, quarum diametrum tenuiſſimi acus mucro multo craſſitie ſuperat. Tentabam hanc ſeparationem in glebula adipis, ſaliua humectata. Trium, quatuor, quinque, aut plurium, veſicularum moleculas a gleba abrupi (a); ſimplices veſiculas ſeparare non potui. Quas ſi nimium vrgebam, compreſſae diſſiluerunt, fluidum oleoſum effluxit. Hoc guttulis minoribus maioribusque, vt oleum aquae ſolet, ſaliuae innatabat (b). Neque difficile eſt has guttulas ab integris veſiculis diſcernere, dummodo luce ſimpliciter ab obiecto reflexa, non contra lucem, a ſpeculo reflexam, obſeruantur.

Adeps animalium diuerſorum non eiusdem magnitudinis veſiculas habet. Gallinae adeps minimas oſtendit (c). Anſerinus maioribus gaudet, (d) in glebas collectis, magis quam in vllo, quod expertus ſum, animali formoſas, (e) aequales, ſimiles, oblongas, media parte craſſiori, extremitatibus acuminatis. Humanus adeps gallinaceum et anſerinum magnitudine veſicularum ſuperat; at ſuperatur ipſe bouino. (f) Hic quidem non

(a) fig. 5. b. b. b.
(b) fig. 5. c. c. c.
(c) fig. 6. b. c.
(d) fig. 7. b. b. b.
(e) fig. 7. a. c.
(f) fig. 8. 9.

non omnes eiusdem magnitudinis veſiculas, velut humanus, ſed alias aliquanto minores, (a) alias maiores, (b) habere viſus eſt. Minores tamen aequales ſaltim humanis, caeterae manifeſto maiores, apparuerunt. Quod tam difficile in humano expertus eram adipe, vt ſingulas a ſe mutuo veſiculas ſepararem, id facili negotio in bouino ſucceſſit. Vbi aliquantum agitare eum ſub microſcopio inceperam, ſponte quaſi veſiculae durae, granorum inſtar, variae figurae dilabebantur (c). Si aqua tamen prius humectatur et emollitur, pulchrae veſiculae arcte connexae, omnino rotundae, apparent (d). Nimirum pelliculae tenues ſunt et parietes diuerſarum veſicularum communes tenues, et omnis, quam celluloſam dicunt, ſubſtantia, qnantum poteſt, adipe repleta; vt minima eius et vix vlla inter veſiculas portio haereat. Haec ergo ſubſtantia imprimis ſiccata et contrahitur magis, vt ad nihilum fere reducatur, et induratur, quo friabilis fiat. Accedit ipſius adipoſae materiae durities. His efficitur, vt ſolo etiam attactu et vi minima tenuis celluloſa ſubſtantia rumpatur et veſiculae, dura materia repletae, granorum inſtar dilabantur. Adeps denique porcinus (e) et humanum praecellit magnitudine veſicularum et bouinum. Sed et hunc humectatum contemplari oportet, quo ſpumae fere inſtar veſicularis haec ſtructura egregie apparet.

Subſtantia, qua adeps continetur, ſua natura, vt reliqua dicta celluloſa, continua et vniformis eſt. Sub cute tam denſus adeps congeſtus, tam arcte infarctus celluloſae, vt parum huius ſub-

(a) fig. 8. a.
(b) fig. 8. b. b.
(c) fig. 8. b. b. b.
(d) fig. 9.
(e) fig. 10.

Digitized by Google

ſubſtantiae in his ſedibus inuenias, quod indagari poſſit. Vbi rarior adeps in diſcretos aggeres collectus, interſtitiis paſſim ſparſis veſiculis occupatis, aut prorſus ab adipe liberis, facilius haec adipem continens ſubſtantia inquiritur. Sic res ſe habet, vbi adeps celluloſam inter muſculos comitatur, eamque, quae muſculos inveſtit, ingreditur, velut in exemplo ſuperiori (a). Adeps etiam ad baſin cordis congeſtus copioſiori celluloſae ſubſtantiae inuolutus quaſi haeret, quae vbi explicatur, glebis adipis euolutis, facile indagari poteſt. Ex illo adipe ergo particulam ſub microſcopium transtuli (b). Continua, vt dictum, vniformis, ſimplex, aequalis, pellucidiſſima, ſemifluida et ductilis eſt. Caeterum veſiculae adipis, in quas fluidi adipoſi depoſitione ſubſtantia celluloſa ductilis ficta eſt, et veſicularis illa hinc nata adipis ſtructura, ne confundatur cum cellis, celluloſae ſubſtantiae adſcriptis, cauendum. Etiam vaſa et aliae partes organicae ex ea ſubſtantia fictae plurimae exſtant; non vaſculoſa ideo aut organica ea ſubſtantia vocatur, ex qua vaſa aut partes organicae finguntur. Et quae ſua natura celluloſa eſſe dicitur ſubſtantia *ipſa*, quam, ſiue fictum ex ea aliquid organici, ſiue non fictum, fuerit, tamen nonniſi celluloſam eſſe poſſe putant, ea nec celluloſa, nec poroſa, nec ſpongioſa ſua natura eſt.

Neque recte cuti ſubcutaneam celluloſam ſubiectam eſſe ſcribitur, in quam ſcilicet ſenſim ſenſimque laxior cutis abiret. Strata ſub cute poſita ſunt ſubſtantiae, quae magis cuti quam celluloſae ſimilis eſt, quae nec incongrue ad ipſam cutem referri

(a) fig. 1.
(b) fig. 2.

ferri poſſet. Neque mediae naturae ſtrata ſunt inter cutem et ſimplicem celluloſam, ſed in adipem potius ex cute tranſeunt. Haec ſtrata continuo adeps excipit. Subcutanea ergo celluloſa ſimplex non datur; niſi eam putes, cuius in ſuperioribus mentionem feci, quamque fig. 1. exhibui, quae ſub adipe tandem ſequitur, eamque inter et musculos ſita eſt.

Sub adipe mero, in glebas compreſſas coercito et condenſato, ſtratum ſequitur celluloſae, copioſo pariter adipe oneratae, ab eo tamen, quem dixi, mero diuerſae. Totum ſtratum maiorem quam merus adeps firmitatem et tenacitatem habet. Veſiculae non in glebas aut moleculas ſubrotundas coactae, ſed in longiores congeries diſtributae, interſtitiis latis longisque, aut ſparſis adipoſis veſiculis ſolitariis, aut veſiculis minoribus albis, paſſim ornatis, aut ſimplici conſtantibus celluloſa pura. Haec clara pellucida, vti quae musculos circumdat, et continua, in fila facile extendi poteſt. In hoc ſtrato vaſa ſanguinea ſubcutanea decurrunt. Tunicam adipoſam hoc ſtratum vocarem, diſtinctum omnino ab adipe mero collecto.

Vti cutis non in ſimplicem celluloſam, ſed in adipem per ſtrata diuerſa ſucceſſive tranſit, adeps demum per hoc adipoſae celluloſae ſtratum in ſimplicem abit celluloſam. Cutis veſiculis, quamuis obſoletis rarisque, adipoſis tamen analogis; ſtratum ſubcutaneum exterius diſtinctis pluribusque; diſtinctioribus copioſisque et flaueſcentibus interius tandem donatum eſt. Tunc quartum a cute ſtratum adipis meri ipſum, et poſt hoc quintum, tunica adipoſa, ſequitur. Haec tandem, magis magisque veſiculis adipoſis priuata, in ſimplicem puram celluloſam, musculos inueſtientem, tranſit.

Tab.

Tab. VI.

Epidermis, cutis, ſubſtantia ſubcutanea, adeps.

Fig. 1.

Portio celluloſae, qua muſculi cum adipe, ipſis incumbente, cohaerent, glebis paſſim adipis, veſiculisque adipoſis ſolitariis, praeditae, maximam partem tamen vacuae adipis, et purae, microſcopio, ſpeculo inſtructo, pellucida viſa, hinc inde extenſa, ex humero hominis macilenti.

a. a. a. Celluloſa ſubſtantia, vbi pura, ſimplex, continua, ſemifluida et tenaciuſcula, cryſtalli inſtar pellucida.

b. b. b. In his partibus continuam ſemifluidam et tenaciuſculam ſubſtantiam in fila extraxi.

c. c. c. Vti ex filis illis alia tenuiora porro extrahi facile poterant, vt ramificata fila fierent.

d. Pars huius celluloſae acubus duabus varie ſub microſcopio extenſa, quo fila non modo ramificata varia, ſed reticularis tela mirae tenuitatis et elegantiae, quam pictura imitari non poſſes, efficiebatur.

e. e. Glebae adipis rariores, per hanc celluloſae ſpeciem diſperſae; aggeres ſcilicet veſicularum et ſolitariae paſſim veſiculae, fluido adipe repletae.

f. f. Bullae aereae, agitatione celluloſae fortuito ortae. Has acu horſum iſtorſum pro lubitu pepuli. Poteram preſſione vnam in duas minores quoque diuidere, easque compellendo in vnam rurſus coniungere.

Fig. 2.

Epidermis, cutis, ſubſtantiae ſubcutaneae et adipis ſectio, quantum fieri potuit, tenuis, microſcopio ſine ſpeculo opaca viſa. Ex brachio hominis eiusdem.

a. a. Epidermis. Eius ſcilicet ſectio, altera extremitate aliquantum a cute ſeparatae.

b. b. Sectio cutis, quae, quantum epidermidem craſſitie ſuperet, apparet.

c. d. c. d. Stratum ſubſtantiae ſubcutaneae, a cute pariter et ab adipe diuerſae, mediae inter vtramque naturae. Eius ſcilicet ſectio. Hoc ſtratum ipſum in duo porro ſtrata alia diuiſum eſſe videtur, exterius alterum, alterum interius.

c. c. Stratum ſubcutaneum exterius.

d. d. Stratum interius, aliquantum exteriori craſſius.

e. e. Adipis ſubcutanei portio.

f. f. f. Diuerſae glebae, quibus adeps conſtat, denſe concumulatae et compreſſae.

g. Lineae obſcurae, quibus glebae a ſe inuicem diſtinguuntur.

h. Veſiculae adipis.

i. Similis linea obſcura, qua adeps a ſubſtantia ſubcutanea diſtinguitur.

k. k. Eiusmodi linea, qua cutis a ſubſtantia ſubcutanea diſtinguitur.

l. Eiusmodi linea, ſed obſoletior, qua exterius ſubſtantiae ſubcutaneae ſtratum ab interiori diſtinguitur.

m. Lineae obſcurae obſoletiores, quibus ſubſtantia ſubcutanea ſimili modo ac adeps in glebas quaſi diſtinguitur.

n. Globuli, qui in ſubſtantia ſubcutanea, vti veſiculae in adipe, apparent, ſed rariores obſoletioresque et albi. Nullum tamen dubium, quin cauae intus ſint pariter atque veſiculae adipis, fluidioremque aliquam materiam, magis vel minus ſpiſſam, contineant. In ſtrato interiori aliquantum flauescunt.

o. Globuli ſimiles, ſed obſoleti et obſcurius expreſſi quam in ſubſtantia ſubcutanea, et rudimenta lineolarum, quibus in moleculas, glebis adipoſis analogas, cutis ſubſtantia diuiſa eſſe videtur.

Fig. 3.

Fig. 3.

Epidermidis, cutis et ſubſtantiae ſubcutaneae ſectio ſimilis, ſimili modo obſeruata.

a. b. c. d. Epidermis, media parte a cute ſeparata.

a. a. Sectio epidermidis.

b. Reflexae in parte hac epidermidis ſuperficies ſuperior, ſeu exterior.

c. Eius ſuperficies interior.

d. Similes fere ac in cute lineolae globulique obſcuriores, quibus aliqua, quamuis remotior, ſubſtantiis his diuerſis: epidermidi, cuti, ſubſtantiae ſubcutaneae, et adipi, analogia aut ſimilitudo intercedere videtur.

e. e. Sectio cutis.

f. Globuli, aut potius veſiculae illae obſoletae, per cutis ſubſtantiam diſperſae, cum lineolis obſcuris.

g. g. Eminentes ex ſuperficie ſuperiori globuli, aut granula quae videntur, cutis, quae in ſectione huius e latere viſa tanto accuratius obſeruari poſſunt.

h. h. Stratum ſubſtantiae ſubcutaneae exterius.

i. i. Stratum eiusdem interius, in quorum vtroque globuli obſoleti, aut veſiculae, lineolaeque obſcurae, vti in praecedenti figura, apparent.

k. Fila ex ſtrato exteriori extracta, in quibus paſſim veſiculae, vna cum reliqua ſubſtantia extractae, apparent.

l. Fila, in quae interioris ſtrati ſubſtantia trahi poteſt, moleculoſa, copioſioribus globulis aut veſiculis in iisdem conſtantibus, inaequalia craſſiora. Exterius ſtratum denſius firmiusque eſt et difficilius in fila extenditur, quae quippe facile rumpuntur. Interius longius extendi poteſt, at fila inaequalia, quaſi glomerata apparent, veſiculis paſſim pluribus cohaerentibus. Etiam flaueſcens inte-

interioris color, ad naturam adipis potius quam purae cellulosae ſubſtantiam hanc ſubcutaneam vna cum cutis ſubſtantia vergere demonſtrat.

Fig. 4.

Particula cutis. Eius ſuperficies externa, armatis oculis viſa. Apparent eminentes globuli.

Fig. 5.

Adeps, ſaliua humectatus, in moleculas minores diſſolutus, veſiculis nonnullis ruptis, fluido adipe effuſo.

A. A. Saliuae guttam ſuper orbiculum effuſam eiusque limites indicat.

a. Gleba adipis.

b. b. b. Moleculae variae trium, quatuor, aut plurium veſicularum, a gleba abruptae. Solitariae veſiculae ex adipe humano vix ſeparari poſſunt.

c. c. c. c. Guttulae fluidi oleoſi, ex ruptis veſiculis ſingulis ſingulae effuſae, ſaliuae innatantes, ſicuti olei guttae innatare aquae ſolent.

Fig. 6.

Adeps gallinae veſiculis minimis diſperſis, in glebas non collectis.

a. Celluloſa.

b. Veſiculae, vbi quaſi congregatae quodammodo eſſe videntur.

c. Veſiculae diſperſae.

Fig. 7.

Adeps anſerinus, veſiculis magnitudine gallinaceas ſuperantibus, minoribus tamen humanis, in glebas collectis ſingulares, oblongas, extremitatibus acuminatis obtuſis.

a.

Digitized by Google

a. Gleba ſimplex.
b. Veſiculae.
c. Qua ratione glebae, vti determinatam figuram habent, determinato modo etiam componantur.

Fig. 8.

Adeps bouinus, nullis diſtinctis glebis conſtans, veſiculis duris, parum cohaerentibus, granorum inſtar facile ſeparabilibus, magnitudine etiam humanas ſuperantibus.
a. Veſiculae cohaerentes.
b. b. Veſiculae ſeparatae.

Fig. 9.

Veſiculae bouini adipis humectatae, quo aliquanto firmius cohaerent.

Fig. 10.

Adeps porcinus, glebis pariter expers, veſiculis omnium maximis, cohaerentibus, aſpectu pulchris, ſpumam haud male, vel congeriem bullularum minimarum, repraeſentantibus.

Fig. 11.

Portiuncula adipis humani ex baſi cordis, glebis euolutis, ſubſtantia, qua inuolutae illae, explicata et extenſa.
a. a. Subſtantia celluloſa explicata, ſimplex, continua et pellucidiſſima.
b. b. Fila, in quae facile extenditur.
c. c. Glebae adipis euolutae.

BIGA

Digitized by Google

BIGA MVRAENARVM, NOVAE SPECIES DESCRIPTAE

a

BASILIO ZUIEW.

Conuent. exhib. die 11 *Octob.* 1790.

Muraenarum cohortem muſaei noſtri Academici perluſtrans binae mihi in manus cecidere, quarum nulli auctorum neue mentionem factam alicubi inuenio; alteram ob colorem cutis *fuſcam*, alteram *albam* appellare libuit: prior conuenit quodammodo cum M. *caeca* Linnaeana, ſed maxilla ſuperior longior, nares non tubuloſae et non ſub roſtro ſitae, oculique praeſentes diſſimilare illam iubent familiae caecarum, caeterum auctori ipſi dubiae. Poſteriorem quoque ophtis varietatem appellare nequaquam licebit, cum corpore ſit ſatis obaeſo, immaculato, caudaque non tereti, vt Artaedi memorat, ſed Cathetoplatea praedita. Hinc nullus dubito, ſpecies haſce, deſcriptione iconibusque illuſtratas, pro nouis ac ignotis hucusque in ſyſtema Ichthyologicum prodituras.

Muraena fuſca.

Corpore laeui, tereti, lumbrici-formi; cauda compreſſa; pinnis dorſali analique in apicem caudae cuſpidatum apterygium concurrentibus. Tab. VII. fig. 1.

Di-

Dimenſiones
Secundum pedem Pariſinum.

	poll.	lin.
Longitudo totius piſcis ab apice roſtri ad extremum caudae - - - - - -	11.	8.
—— ab apice roſtri ad oculos - - - - - -		2.
—— —— —— ad angulos oris - - - -		6.
—— —— —— ad nucham - - - -		8.
—— —— —— ad exordium pinnae dorſis	1.	5.
—— —— —— —— —— ani	5.	2.
—— —— —— ad aperturas branchiarum	1.	1.
—— —— —— ad anum - - -	5.	1.
—— Maxillae ſuperioris prae inferiore - - -		1.
Circumferentia roſtri ad oculos - - - -		4.
—— —— capitis ad nucham - - - -		8.
—— —— trunci vbique aequalis, ſed hic paulo poſt aperturas ſumta - -		10.
Longitudo pinnae dorſalis - - - -	9.	3.
—— —— analis - - - - -	5.	5.
—— ab ano ad extremum caudae - -	6.	6.

Deſcriptio.

Corpus cylindricum, alepidotum, lubricum, extremitate altera conica, altera compreſſo-cuſpidata. *Caput* ſubrotundum, deſcendens a nucha et gula ſenſim in roſtrum elongato-acuminatum, conicum, orbitarum eleuationibus ſolis parum eminentioribus, caeterum reſpectu longitudinis totius corporis paruum, tectum cute glaberrima. *Rictus oris* horizontalis, ad verticem vsque capitis fiſſus, anguſtus. *Roſtrum* a vertice ad extremum apicem adtenuatum, plus quam poſt medium tantillum ob orbitas oculorum eleuatum, poſtea acuminatum. *Man-*

Digitized by Google

dibulae porrectae, cute communi tectae, longitudinaliter bis terue rugoſae, rugis a latere labia fere tenuiora aemulantibus, antrorſumque in apicem carnoſum conicum definentibus; ſuperiore mandibula longiore, apice carnoſo ſupra glaberrimo, infra bilabiato, naribus ad latera rotundis minimis terminata; inferiore mobiliore; cirrhi ad vtrumque latus labiorum ſuperiorum bini, cutanei, pupilliformes, alter ſub oculis paulo maior, alter aduerſus apicem mandibulae inferioris, vel potius ad nares, paulo minor praecedenti, ambo tot quaſi dentes caninos ab vtroque latere repraeſentantes. *Dentes* in vtraque maxilla minimi, acutiſſimi, conici, fixi, aequales, exceptis quatuor ad apicem maxillae inferioris caeteris parum maioribus, omnes verſus gulam ſpectantes; *Palatum* ordine ſimilium dentium paulo groſſiorum, inter ſe parallelium longitudinaliter ornatum. *Lingua* acuta, medio profunde ſulcata, maxillis annexa. *Nares* ad latera apicis carnoſae roſtri exiguae, rotundae, limbo molliuſculo circumuallatae. *Oculi* ad ſuprema latera roſtri, vbi medium eiusdem ob vicinitatem orbitarum eleuatius ſentitur, ovato-oblongi, minimi, cute communi tecti, ita vt vix, niſi orbitarum marginibus eleuatis, vtrum praeſint, diſcernantur. *Opercula branchialia* cutanea, infra ſupraque corpori adnata, minima, ſubarcuata, radiis per cutem tenacem vix transparentibus; *Aperturis* infra gulam hiantibus, ſemilunaribus, membrana intus duplicatis, patentibus. *Nucha* gibboſa, vnà cum gula protuberante facit partem toto corpore craſſiorem. *Branchiae* infra nucham vicinae, operculis cutaneis omnino tectae. *Dorſum*, *thorax*, *abdomen*, *latera* ad anum vsque teretia, cute tenaci, nuda, lubrica tecta. *Linea lateralis* papillis cutaneis inſignis, ad latera occipitis inchoans, ſenſim ad nucham gibboſam incuruata, poſtea dorſo parallela eidemque proxima rectiſſime tendit ad initium pinnae ſubcaudalis, at vltro ſenſim ſenſimque deſcendendo per vltimam caudam fit media, papillis cutaneis vbique nota-

notabilis, caeterum glabra. *Anus* inter Caput et Caudae apicem fere medius, aut priori propior. *Cauda* reſpectu caeteri corporis magis complanata, ſupra infraque fere carinata. *Pinnae* ſimplices, radiatae; *Dorſalis* incipit paulo poſt aperturas branchiarum, perque omnem dorſi longitudinem ad apicem vsque caudae aequaliter tendens extra ſulcum dorſi vix conſpicua. *Pinna ani* paulo euidentior dorſali, excurrit ſecundum integram caudae longitudinem, atque in apice apterygio, ceu limbum exilem formans, coaleſcit cum dorſali. *Cutis* tenax, laevis, fuſca per integrum corpus. *Habitus* macer.

Muraena alba.

Corpore ſerpentiformi, glaberrimo, nudo, albo; cauda compreſſo-cuſpidata, limbo cutaneo marginata. Tab. VII. fig. 2.

Dimenſiones.

	ped.	poll.	lin.
Longitudo totius corporis ab apice roſtri ad extremum caudae - - -	1.	5.	9.
—— ab apice roſtri ad medium oculum -	—	—	4.
—— —— —— ad nares - - - -	—	—	4.
—— —— —— ad angulos oris - -	—	—	7.
—— maxillae ſuperioris ad muham - . -	—	1.	3.
—— —— inferioris ad angulos oris -	—	—	6.
—— —— —— ad apertur. branch.	—	1.	6.
Altitudo rictus diductis mandibulis - -	—	—	5.
Diſtantia inter oculos - - - -	—	—	$3\frac{1}{2}$.
—— inter nares - - - - - - -	—	—	$1\frac{1}{2}$.
Latitudo maxillae ſuperioris ad oculos - -	—	—	6.
Altitudo roſtri ad oculos maxillis clauſis -	—	—	$3\frac{1}{2}$.
Latitudo capitis maxima - - - -	—	—	8.
Altitudo eiusdem ſumma - - - -	—	—	7.

	ped.	poll.	lin.
Circumferentia capitis ad nucham - - -	—	2.	—
Latitudo maxillae inferioris ad oculos - -	—	—	4.
—— —— —— ad angulos oris -	—	—	6.
Ab apice maxillae inferioris ad anum - -	1.	1.	3.
Ab ano ad extimum apicem caudae - -	—	5.	8.
Ab apice roſtri ad exordium pinnae dorſ. -	—	11.	3.
Altitudo caudae infra anum - - -	—	—	7.
Craſſities in eodem loco - - - - - - -	—	—	5.
Circumferentia trunci vbique aequalis - -	—	2.	1.
Apertura ani per longitudinem et transuerſim -	—	—	2½.
Apertura branchialis - - - - -	—	—	2.

Deſcriptio.

Corpus cylindricum, nudum, cute alba glaberrima tectum, extremitate altera ouato-depreſſa, altera compreſſo-lanceolata. *Caput* ouato-oblongum, a ſummo vertice ad roſtrum deſcendens, infra planum, craſſitie reliquo corpori aequale. *Rictus oris* transuerſus, mediocris. *Roſtrum* breue, decliue, obtuſiusculum; maxillis ſubplagio-plateis, labiatis, inaequalibus, ſuperiore longiore; *labiis*, ſuperiore ſurſum, inferiore quaſi duplicato deorſum reflexis, carnoſis, craſſiusculis, intus ordine papillarum cutanearum ceu dentibus circumdatis. *Dentes* in vtraque maxilla et palato plurium ordinum, minimi, aceroſi, aequales, in palato obtuſiores, fixi. *Lingua* integra, carnoſa, obtuſiuscula, libera, glabra, palato vaginata; *Palatum* fornicatum, in medio glabrum, lateribus maxillis parallelis eleuatis, denticulatis. *Nares* ſupra oculos diſtinctae, ouales, ſurſum patentes, ſolitariae, paruae. *Oculi* in anteriore capitis parte ſiue ad baſin roſtri ſub ipſis naribus ſiti, mediocres, conuexiusculi, nigri, ſubrotundi, orbita ouali, cute communi tecti, *pupilla* argentea mi-

minima nictitantes. *Apertura branchialis* vnica, ſub gula in formam ferri equini formata, membrana branchiali per integram gulam expanſa fere operta. *Gula* plana. *Thorax*, *Dorſum*, *latera*, *abdomen* teretia. *Linea lateralis* recta, ad caput eleuatior, caeterum per totum corpus media, laeuiſſima. *Anus* ſub cauda, a capite remotiſſimus, ſemilunaris, amplus, patulus. *Cauda* cathetoplatea, cuſpidata, apterygia, limbo verſus extremitatem exiliſſimo alata. *Pinna dorſalis* membranacea ſub extremum dorſi inchoans ad apicem caudae fit euidentior, in apice vero cum ſubcaudali confluendo fere euaneſcit. *Pinna ſubcaudalis* longe ab ano incipit pariter cutanea, magis viſibilis euadit ad extremitatem caudae, longe tamen minor altitudine, quam dorſalis. Ambo ſpecimina proſtant in collectione Dhalberghiana.

Digitized by Google

NOTICE
SUR LE SCHOERL ROUGE
DE SARAPOULSKOI EN SIBÉRIE.

Par

Mr. ***HERMANN.***

Préſenté à la Conférence le 2 Décembre, 1790.

Introduction hiſtorique.

Parmi les Schoerls, dont il y a beaucoup d'eſpéces en Sibérie, celui de couleur rouge, nouvellement découvert, eſt ſans doute un des plus rares; il eſt tout différent de celui en très petites aiguilles d'une couleur rougeâtre tirant ſur le verd, qu'on y trouve déjà depuis quelques années, ce qui lui a merité le nom de Schoerl capillaire; (Haarſtein, Волоссатикъ) ces aiguilles minces traverſent en direction différente ou le Criſtal de roche ou un Quarz gras aſſez transparent, mais le Schoerl qui eſt le ſujet de ce Memoire, eſt d'une autre eſpéce.

Ce Schoerl ne ſe trouve, à ce que je ſache, dans aucun pays de l'Europe. Il me manque préſentement la plus grande partie de mes livres; je ſuis donc hors d'état, de conſulter là - deſſus la plupart des auteurs minéralogiques. Dans ceux dont je me vois pourvu, je ne trouve rien d'une eſpéce pareille. Mr. Ferber p. ex. parle d'un foſſil *rouge* de la Suiſſe

Suiſſe qu'on y avoit découvert il y a quelque tems; mais il le compare au Schoerl capillaire de Catherinebourg (*); il eſt donc différent de celui de Sarapoulskoi. En Hongrie il y a auſſi un Schoerl *rouge*; quelqu'uns prétendent pourtant, que c'eſt un Hiacinthe; des autres, par ex. Mr. Hofman croient, qu'il doit etre rangé au grénat (**). Le tourmalin d'un brun jaunatre de l'Isle de Zeïlon, qui a une couleur de *cramoiſin* en le voyant à travers des faces, & dont parle Mr. Karſten dans le Muſeum Leskïanum, n'eſt ſurement non plus de l'eſpéce du Schoerl de Sarapoulskoï (***). Mr. Gmelin dans le ſyſteme minéralogique de Linnée parle d'un Schoerl rouge de Glatz en Siléſie, & d'un autre de couleur de rubis, qui ſe trouve dans les Laves du Veſuve, & dans les montagnes de Schladming en Stirie (****). Je ne connois pas celui de la Siléſie; mais les Schoerls dans les Laves ne peuvent pas etre comparés au notre, & celui de Schladming n'eſt qu'un Schoerl capillaire. Il me ſemble donc, que notre Schoerl rouge, s'il n'eſt pas unique, eſt pourtant tres-rare.

On le rencontre dans le Gouvernement de Perme au cercle d'Alapaëfsk, 12 verſtes de la Slobode de Mourſinsk aux environs du village de Sarapoulskoi ſur la pente orientale d'une montagne iſolée, dont la hauteur ne ſurpaſſe pas 50 toiſes de Ruſſie (Сажень); & qui a cependant une grande circonfé-

fé-

(*) Drey Briefe mineralogiſchen Innhalts, p. 21.

(**) Bergmanniſches Journal, mois Avril, 1789, pag. 388. —L'Académie a reçu de la part de ſon Directeur S. Exc. Madame la Princeſſe de Daſchkav un échantillon de Schoerl rouge d'Hongrie; eſt-ce qu'il eſt de la méme eſpèce que le nôtre? Hiſt. de l'Acad. p. l'année 1789, p. 39.

(***) Vol. I. pag. 78.

(****) Vol. II. pag. 131.

Digitized by Google

férence, de ſorte, qu'on la monte fort commodement. La pierre dont cette montagne eſt compoſée, conſiſte en Granit, ce qu'on peut voir en pluſieurs endroits, où elle n'eſt pas couverte de la terre végétale (Dammerde). Ce Granit eſt d'un grain aſſez ſin, conſiſtant en Feldſpath, Quarz & Mica; le Feldſpath y prédomine. Sur cette montagne il n'y a qu'un ſeul endroit, où l'on exploite le Schoerl rouge; on remarque ici un filon de Feldſpath de l'epaiſſeur d'une jusqu'à 3 Archines. Celui-ci eſt d'une couleur rougeatre, tirant ſur la couleur de chair; il eſt rempli de Quarz en forme des pyramides, des grains & des feuilles, dont la couleur eſt d'un rouge brunatre; en outre il contient parci parlà quelques criſtaux de Schoerl noir (ſchwarzer Stangenſchoerl) & du Mica jaune. Celui-ci n'entre guere dans ſa compoſition; il ſe trouve pour la plupart dans les Salbandes, c'eſt-à-dire entre le filon & la roche, de la quelle conſiſte la montagne entiere. Le Feldſpath prédomine ſi fort dans le filon, qu'on le rencontre en maſſes tres-conſidérables, qui ſe caſſent en grands morceaux rhomboidales feuilletés, dont quelqu'uns jouent, quand ils ſont taillés & polis, la couleur de nacre de perles. Le Quarz y melé eſt tres-curieux; non ſeulement il affecte la cryſtalliſation pyramidale à 4 & à 6 pans ſans prisme, il préſente auſſi des figures, lesquelles, quand le Feldſpath eſt taillé dans un certain ſens, reſſemblent à des lettres hebraiques. Le Schoerl noir y eſt disperſé irregulierement, tantot en grouppes tantot en colonnes iſolées. Il ſe trouve quelquefois avec le Schoerl rouge dans le meme endroit.

C'eſt un payſan, qui a trouvé par hazard en 1789 les premiers échantillons de ce Schoerl rouge. Il les a vendus à un marchand de minéraux, duquel Mr. le Comte de Golovkin les a achetés pour une ſomme fort conſiderable. Je les ai

vus

Digitized by Google

vus pour la premiere fois dans ſon riche cabinet. Lorsque je viſitois, il y a quelque tems, le lieu même où l'on exploite ce foſſile curieux, j'y ai trouvé quantité d'endroits où l'on a fouillé dans la terre végétale (Dammerde); car ce n'eſt pas dans la roche même, c'eſt-à-dire dans le Granit ou dans ſon filon, qu'on l'a trouvé; au contraire on ne rencontre le Schoerl rouge, que dans cette terre végétale, laquelle pourtant doit ſon exiſtence au Granit & pour la plupart au Feldſpath décompoſé. La couche de cette terre a bien l'épaiſſeur d'1½ jusqu'à 2 archines & plus. Elle conſiſte en argille rougeâtre, mélée d'une quantité des fragmens de Feldſpath, de Quarz & de Mica; & c'eſt dans ce mélange que ſe trouve nôtre Schoerl rouge, tantôt en criſtaux iſolés, tantôt & pour la plupârt en grouppes, qui reſſemblent à des bouquets en rayons excentriques. Ces circonſtances démontrent ſuffiſamment, qu'il doit ſon exiſtence au filon de Feldſpath, dans les fentes & cavités duquel il s'eſt formé, ainſi, que ſa couleur, laquelle ſemble dériver du Quarz rougeâtre, dont le Feldſpath eſt mélé, ou plutôt tous les deux doivent leur couleur, du moins en partie, au même principe colorant.

Par la décompoſition du Granit & de ſon filon, les grouppes de Schoerl, comme beaucoup moins déſtructibles, en tomboient, & ſe conſervent dans la terre végétale, où elles ſe trouvent aujourd'hui diſperſées. Cette ſuppoſition acquiert encore plus de vraiſemblance, quand on conſidére, que j'ai vû des échantillons du Schoerl rouge avec du Feldſpath adhérent encore non-décompoſé. — Ce Schoerl rouge n'eſt pas à la verité ſi cher à preſent, comme il l'a été au commencement à Moscou, où l'on a payé pour une petite grouppe 200 à 300 roubles; mais il eſt encore beaucoup plus cher, que toutes les autres pierres de Sibérie. On n'a trouvé qu'une

ne petite quantité des échantillons, & à preſent il coute une peine infinie, de trouver un morceau ſur le lieu même.

Déſcription de ſon extérieur.

1.) Pour la plûpart nôtre Schoerl eſt de couleur de roſe foncée, quelquefois tirant ſur le brun rougeâtre ou couleur de framboiſe. Les pièces taillées ont toujours une couleur rouge plus foncée, ſi l'on laiſſe tomber la lumière ſur elles; mais contre la lumière pour l'ordinaire elles paroiſſent de couleur de roſe ou de *rubis balais*, pourvû que la pierre ne ſoit pas trop épaiſſe.

2.) Il ne ſe trouve qu'en criſtaux; ceux-ci repréſentent pour la plupart des aiguilles minces, reunies en bouquets ou faiſſeaux coniformes, préciſement comme on trouve quelquefois le Schoerl verd & blanc (grüner und weiſſer Strahlſchörl). Les échantillons d'une groſſeur p. e. d'un ou deux pouces conſiſtent à l'ordinaire en 3, 5, jusqu'à 8 bouquets, plantés l'un ſur l'autre en différente direction. On trouve auſſi des bouquets iſolès, dont les criſtaux ſont communément un peu plus épais. De cette eſpéce eſt l'échantillon que j'ai l'honneur de préſenter à l'Académie, joint à ce Mémoire.

3.) Pour l'ordinaire les criſtaux de nôtre Schoerl ſont petits, furtout ceux, qui ſe ſont reunis en grouppes. Il eſt rare de les trouver d'une epaiſſeur, qui excéde celle d'un quart de pouce. J'en ai vû à la verité un criſtal d'une épaiſſeur presque d'un demi-pouce; mais il conſiſtoit des pluſieurs petits criſtaux, qui ſe ſont ſi parfaitement réunis, qu'à peine on pouvoit remarquer les points de leur réunion. De plus, ce criſtal étoit canellé ſur la ſurface, de ſorte, qu'on ne pouvoit pas com-

compter le nombre de ſes faces; il repréſentoit parfaitement bien une colonne ronde; il me paroit neanmoins, que nôtre Schoerl affecte la criſtalliſation d'un prisme tantôt à 4, tantôt à 6 pans, avec des pyramides obtuſes à 3 faces.

4.) Il eſt fort curieux, que, quoique l'on ne puiſſe pas bien diſtinguer dans les faisceaux de nôtre Schoerl la figure de ſes criſtaux, ceux-ci ſont pourtant tous pointus aſſez reguliérément; mais ce ſont presque toujours pluſieurs aiguilles très minces, qui ſe ſont reunies, pour former une pyramide obtuſe & ſolide, tantôt à 3, ce qui eſt le cas le plus ordinaire, & quelquefois à cinq facettes. Le Schoerl noir ſe trouve ſouvent de la même façon. En géneral nôtre Schoerl rouge a beaucoup de reſſemblance avec celui-là, ſurtout à l'gard des criſtaux iſolés d'une épaiſſeur un peu plus conſidérable. Outre cela j'ai vu un criſtal de ce Schoerl rouge d'une groſſeur à peu près d'un demi-pouce, canellé ſur la ſurface & planté ſur un criſtal de Schoerl noir, de manière, que les deux couleurs, la rouge & la noire, ſe perdoient inſenſiblement l'une dans l'autre.

5.) Il n'eſt pas moins rémarquable, qu'une aiguille mince n'ait presque jamais la pointe regulière; ce ſont toujours pluſieurs petits prismes, qui ſe ſont reunis pour former à la pointe une pyramide de la configuration ſusdite; mais les criſtaux iſolés ne ſont jamais pointus de cette façon, autant que j'en ai vu. Ils ſont tronqués nets, préciſement comme les aigues marines de Nertſchinsk. Cependant il y a quelques uns, dont la coupe préſente trois facettes fort ètroites, de manière, qu'il en reſulte une pyramide à 3 faces très obtuſes, dont le ſommet eſt coupé presque à ſa baſe.

Digitized by Google

6.) Les criſtaux de nôtre Schoerl ſont luiſants ſur leur ſurface & pour la plupart très - luiſants; de même que la caſſure, laquelle, ſi l'on caſſe le criſtal en deux, eſt toujours fort luiſante & plutôt grainuleuſe que feuilletée; mais s'il eſt caſſé en deux par ſa longueur, la caſſure ſe préſente en aiguilles. Un faisceau entier montre dans ſa caſſure à peu près la figure des vergettes.

7.) Communément ces criſtaux ſe caſſent en morceaux d'une figure non - determinée, dont les pointes ſont fort tranchantes, excepté les criſtaux iſolés, qu'on peut caſſer en colonnes très courtes, car on voit que ces criſtaux ſont produits par des lames minces poſées l'une ſur l'autre, preciſement comme dans les Schoerls noirs & dans les aigues marines de Nertſchinsk.

8.) D'ailleurs nôtre Schoerl eſt pour la plupart demi - transparent, & presque jamais tout net; il a quantité des fiſſures & des fentes. Je n'ai pas encore vu aucun criſtal, qui auroit été tout - à - fait net. Cependant les pierres taillées minces ſont aſſez transparentes, du moins vers les pointes, quoique jamais pures. Ces mêmes fiſſures ſont auſſi la cauſe, que la lumière ſe réfracte en tombant ſur la pierre, & produit un beau jeu de couleur d'Iris, qu'on remarque dans quelques pierres taillées.

Eſſais chymiques.

1.) La péſanteur ſpécifique de nôtre Schoerl rouge eſt de 2875 à 1000.

2.) Il fait feu avec le briquet fort vivement; mais ſes pointes tranchantes s'en caſſent un peu.

Digitized by Google

3.) Il eſt dur & ne cede guère à aucune pierre, excepté le diamant. Sa dureté ſurpaſſe celle des Améthyſtes, des criſtaux de roche, & même quelquefois celle des aigues marines de Nertſchinsk. Il eſt pourtant un peu fragile, & difficile à travailler, quoique les criſtaux un peu plus nets ſont fort denſes.

4.) Il coupe le verre, mais pas ſi bien comme le diamant.

5.) Etant reduit en poudre, celle-ci a la couleur de roſe pâle.

6.) Sans addition d'un fondant il eſt infuſible au Chalumeau, ne décrépite pas, & ne donne point de marques de phosphorescence en jéttant ſa poudre ſur des charbons brulants.

7.) Dans un feu continué quelque tems il devient prémièrement bleuâtre, puis blanc & tout-à-fait opaque & beaucoup plus fragile, qu'il n'etoit auparavant, de ſorte, qu'on le peut écraſer parmi les doigts.

8.) Je l'ai voulu fondre dans un creuſet ſans addition d'un fondant; il a perdu au commencement ſa couleur, & eſt devenu tout blanc & opaque; puis il crévoit en prenant beaucoup plus de volume, qu'il n'avoit dans ſon état naturel. La friabilité, qu'il a acquiſe en même tems, eſt ſi conſidérable, qu'il tombe presque au moindre choc dans une poudre blanche. Il n'y entre pas en fuſion; mais dans le feu le plus violent d'une forge je l'ai fondu en un verre blanc, démitransparent, & ſi dure, qu'il fait feu avec le briquet. En y mélant du Borax ou du ſel microcosmique, la fuſion dans ce feu ſe fait plus aiſément, mais toujours en continuant le travail quelques heures, & pouſſant la chaleur au plus haut degré poſſible.

Digitized by Google

9.) L'acide nitreux, 10.) L'acide marin, 11.) L'acide vitrioiique, 12.) L'eau régale, 13.) L'acide de phoſphore, 14.) L'acide de ſucre, 15.) L'acide de tartre,	n'agit pas ſur lui, ni ſur les criſtaux dans leur état naturel, ni ſur leur poudre non-calcinée ou calcinée.

16.) En ajoutant à l'acide nitreux, marin & vitriolique,

de l'alcali minéral, de l'alcali végétal, de l'alcali volatil,	la poudre ne ſouffre aucun changement.

17.) La leſſive de l'alcali phlogiſtiqué (Blutlauge) donnoit à la verité avec l'acide nitreux, dans lequel il y avoit de la poudre non-calcinêe de nôtre Schoerl, un précipité bleu, lequel, étant bien calciné, eſt attirable par l'aimant; mais ces particules de fer ne provienent ſurement pas du Schoerl, celui-ci n'ayant rien perdu ni de ſa couleur, ni de ſon poids; c'eſt ſans doute de la leſſive, la quelle, comme on ſait, ne peut jamais être tout-à-fait purifiée du fer.

18.) Lorsque la poudre eſt bien calcinée, il ſe fond au chalumeau, mais imparfaitement, avec le borax, le ſel microcosmique & l'alcali minéral, dans une boule blanchâtre, dans laquelle on remarque quantité de petites taches d'une couleur d'émail blanc.

19.) Enfin pour reconnoitre les parties conſtituantes de nôtre Schoerl, j'en ai preparé une liqueur ſilicieuſe. J'ai pris 100 grains du Schoerl, reduits en poudre très-fine, & ai j'y melé 200 grains d'alcali minéral. On a mis ce mélange dans un creuſet, dans lequel je l'ai bien calciné. La maſſe prenoit une couleur rougeâtre tirant ſur le bleu; j'y ſoupconoit donc

donc un peu de manganèſe (Braunſtein), quoique par la trituration elle devenoit blanchâtre tirant ſur le gris. J'ai pris une partie de la ſolution, produite par le procedé ſuivant, & en y ajoutant de l'acide marin, on remarquoit quelque legere odeur de l'acide dephlogiſtiqué; ce qui ſe précipitoit & ce qui reſtoit dans le filtre, étoit digéré dans une leſſive de l'alcali cauſtique & puis bien ſeché; j'en ai reçu à peine 2 grains de manganèſe.

20.) Lorsque j'ai diſſout la maſſe calcinée dans l'eau diſtillée, il ſe développoit quelques petites boules d'acide fixe; la ſolution étoit presque incolorée, un peu tirant ſur le rougeâtre. L'ayant echauffée & miſe en répos pendant quelques jours, il ſe précipitoit une poudre blanche indiſſoluble & inattaquable par tous les acides, qui péſoit 39 grains.

21.) On méloit avec cette ſolution de l'eau régale jusqu'à ce que l'alcali étoit ſaturé; on l'a filtré, ce qu'il y avoit dans le filtré (apres l'avoir bien ſeché & calciné) étoit une poudre blanche très-fine, qui péſoit 8 grains. Elle avoit de même comme la poudre ſusmentionée, toute la propriété de la terre quarzeuſe.

22.) J'ai ajouté au gélé qui ſe produiſoit de cette ſolution, de l'acide vitriolique, par lequel j'ai reçu une très petite quantité de Sélénite. Pour précipiter la terre d'alun laquelle s'y pouvoit trouver, on ajoutoit de la terre du ſel d'epſom, & pour ſéparer celle-ci, je l'ai ſaturé avec l'alcali minéral. Pour ſéparer la terre calcaire du Sélénite & celle de l'Alun, je les ai fait bouillir chacun dans une leſſive alcaline, puis je les ai bien ſechés.

23.) Par tous ces procedés (en déduiſant la terre du ſel d'epſom) j'ai reçu :

Terre ſilicieuſe ou quarzeuſe - - -	47 grains.
Terre d'Alun ou terre argileuſe - -	28
Terre du ſel d'epſom ou terre de ſerpentine	10
Terre calcaire - - - - - - -	7
Mangancſe - - - - - - - -	2
	94
Perte - - - - - - - - - -	6
	100 grains.

Je n'ai donc rien trouvé de fer; il faut dire cependant, que j'ai employé dans mes eſſais les morceaux les plus purs que je poſſedois. Si j'avois pris des criſtaux d'une couleur foncée, comme ils le ſont pour la plupart, peut-être j'y aurois trouvé auſſi du fer.

ESSAY

ESSAY
SUR
LES PIERRES DE ROCHE
COMPOSÉES.

Par BASILE SEWERGUINE.

Partie premiere.

Préſenté à l'Académie le 20 Janv. 1791.

§. I.
Introduction.

„ Outre l'avantage, qui amêne la vraye connoiſſance des „ pierres de roche (compoſées) dans l'uſage économique, dit „ le celebre Mineralogiſte de Suede, les mineurs & les ama- „ teurs de la géographie ſouterraine en attendent un tout dif- „ férent avec le tems. Car ils eſperent qu'à force d'obſerva- „ tions, ils pourront decider ſi elles ſont toutes également „ importantes, ſi elles contiennent quelques metaux, & quelles „ ſortes de mines elles renferment; ſi d'autres qui ſe rencon- „ trent par tout y ſont impropres; quelles ſont celles parmi „ elles, qui peuvent ſervir de ce qu'on apelle enveloppe en „ Allemand *ſalbande*, pour couvrir les autres eſpeces ainſi que

„ les filons des mines. S'ils ne peuvent pas tirer des conſé„ quences générales de leurs obſervations ils comptent pour„ tant en fonder de particuliéres pour certaines contrées, & „ cette pretention a été confirmée, comme étant bien appuyée „ par l'experience en pluſieurs endroits &c. „ (Eſſay d'une nouvelle Mineralogie, l'Edition françaiſe par M. Dreux le fils à Paris 1771. p. 352.) Ce n'eſt cependant que depuis peu de tems que l'on a commencé de les diſtinguer avec plus d'attention. Jusques là on c'eſt contenté de nous dire, que telle ou telle éſpéce pierre eſt une pierre de roche compoſée, & on nous cita des denominations que quelques auteurs en avoient données bien ou mal tout égal. Les noms de granit & de Porphyre ſont ceux, ſous les quels on comprit la plûpart des pierres de roche compoſées. Je crois que je n'aurai pas beſoin d'en citer les exemples. La plûpart des Mineralogiſtes les connoitront trop pour que j'aye beſoin de m'étendre la deſſus. Les Mineralogïſtes ſuedois ſemblent être les premiers qui s'en occupèrent le plus ſerieuſement, & qui s'en firent une étude plus particuliére. Ceux de la Suiſſe la pourſuivirent de nos jours avec le plus d'ardeur. Du tems de Linnaeus, de Wallerius & même de Cronſtedt qui ſont du nombre des premiers, on ne s'occupoit que d'en citer les plus remarquables, & encore s'embaraſſa-t-on peu de leurs parties conſtituantes. On ne les cita, que pour quelque propriété extérieure remarquable, telle que la faculté de rendre un ſon clair, quand on les frappe par quelque corps dûr &c. On leur donna des noms particuliers à cauſe de ces proprietés differentes, quoique les parties conſtituantes reſtoient toujours les mêmes. De là vient, que des pierres de roche compoſées, qui quant à leurs parties conſtituantes etoient presque les mêmes, avoient des noms differents, & d'autres qui differoient totalement l'une de l'autre par leurs parties conſtituantes

ſtes n'avoient qu'un ſeul nom commun. Les noms de Tritorium, Roeroſienſe & Mareſtrandenſe d'un coté, & ceux de Granit & de Porphyre de l'autre prouvent, ce me ſemble, ſuffiſamment les deux cas cités. Wallerius alla cependant plus loin & les conſidéra plus attentivement.

Les Allemands ne firent depuis que de les rediger ſous des ſyſtêmes. Les Mineralogiſtes françois & italiens ne s'occupent depuis un tems que de l'etude des volcans. Ce ne ſont que ceux de la Suiſſe, & puis les Ruſſes & les Anglois, qui s'en firent une étude plus particuliere. Surtout le nom du célébre Mr. de Sauſſure à Génève ſera pour cet égard comme pour bien d'autres longtems gravé dans la mémoire des vrais amateurs de la Science. Cependant les progrés de cette étude ont été toujours trés lents. Parmi les modérnes l'amour pour les Théories a remporté ſur celle de definir les corps naturels plus exactement. On viſite quelque carrière, on contemple l'entier, & d'un oeil avide on ne cherche que ce qui ſoit nouveau ou ſingulier. Souvent n'eſt ce que ce bel arrangement des choſes entre elles, qui fait ce qui porte les beau titre de coup d'oeil frappant, où l'on arrête ſes regards, cependant l'imagination s'échauffe, on revient dans ſon cabinet, on fait une Théorie. Un autre aprés vient la contempler auſſi, trouve le fait autrement, il desapprouve la Théorie; on dispute; mais qu'en profite la Science? Rien, ou peu de choſe. Ce n'eſt que l'exactitude des obſervations & des définitions des corps naturels qui ſont de ſon reſſort, qui la portera à ce haut degrés de perfection qu'elle pourra jamais atteindre. Il y a autant de Siecle, que la Mineralogie exiſte & cependant faute d'éxactitude, n'eſt-ce que de nos jours qu'elle commence à fleurir!

Digitized by Google

Le but que je me ſuis propoſé ici n'eſt que de raſſembler ces differentes éſpéces de pierres de roche compoſées ſous un ſyſtême. Le nombre en eſt ſi grand & leur compoſition varie autant que j'ai cru le devoir nécéſſairement tenter, d'autant plus que je n'en connois aucun ſyſtème commode. Mais en même temps dois je remarquer que j'en ai raſſemblé la plûpart d'aprés les obſervations que les naturaliſtes en ont faites, & que ce n'eſt donc plus ma faute ſi on les aura mal obſervées. Au reſte ſans me flatter d'y avoir reuſſi, je ne ſouhaite par là que d'attirer l'attention des Mineralogiſtes ſur des corps du regne mineral qui la meritent autant. Les conſéquences qu'on en tire ſont devenues trop importantes, & les erreurs qui en reſulteront ſi on ne les conſidère pas avec toute l'attention poſſible, peuvent devenir trop grandes & même trop dangereuſes à la ſcience, pour ne pas tenter de repandre quelques lumières ſur cette matiére.

§. II.
Sur les caractéres diſtinctifs des pierres de roche compoſées.

Les caractéres les plus propres pour definir éxactement un corps quelconque, ſont *ceux que l'on trouve dans la maſſe du corps même* que l'on veut definir & non ces circonſtances extérieures comme la ſituation &c. Car ſi l'on me dit par exemple, qu'une telle ou telle éſpéce de pierre ſe trouve dans les filons des montagnes, & que ſi je l'ai ramaſſée parmi les pierres roulées au bord d'une fleuve, l'idée que j'en aurai ſera-t-elle claire? Du moins je commence à douter. Cependant eſt ce une erreur, où les Mineralogiſtes tombent ſouvent. Mr. Voguel & quelques autres definiſſent les pierres de roche compoſées, que ce ſont des pierres dont *toutes* les montagnes conſiſtent. Oui; les montagnes en conſiſtent; mais cha-

chacun voit bien, qu'il y reſte toujours la demande, quelles ſont donc ces pierres, dont les montagnes conſiſtent? je tacherai d'y repondre.

La definition des pierres de roche compoſées (*) en général la plus propre ſeroit ſelon moi, que ce ſont des pierres compoſées de differentes éſpéces de pierres, qui ſont réunies enſemble par la ſimple aggregation mechanique. J'y comprends donc tant les pierres de roche compoſées primitives, que celle de ſeconde & même de troiſieme formation comme les breſches, les grés &c. Quelques uns ont voulu borner cette idée, mais il me ſemble que le nom même indique la definition que j'en ai donnée.

Mais pour donner une idée plus parfaite de ces éſpéces de pierres, il faut que je remarque, que chaque partie conſtituante doit y être viſible, & que l'on puiſſe diſtinguer chacune d'elles, ſans cependant qu'elles ſoyent toujours bien formées. Car la Marne par exemple, dont les parties conſtituantes ſont ſouvent reunies enſemble auſſi bien méchaniquement, que dans les premieres, cependant elle n'entrera jamais dans cette claſſe, parce qu'on n'y reconnoit les parties conſtituantes, que par des operations chymiques. Encore une propriété remarquable de ces éſpéces de pierres, c'eſt que jamais les parties conſtituantes dans leur état naturel, n'y ſont ſous la forme d'une terre proprement dites; mais toujours endurcies, ſans la forme de grains, de lamelles, de cryſtaux & même en très grandes maſſes ſolides. Du moins c'eſt la regle.

 Et

(*) Mr. de Linnée les deſigne ſous le nom de Saxa. Quelques uns les appellent ſimplement pierres de roche, mais comme cela pourroit enduire en erreur, j'y ai ajouté l'epithete de compoſées, parceque ce ne ſont que ces dernieres dont je traite ici.

Digitized by Google

Et le Granit, le Porphyre, le Gneuss, les Grés, les Breſches &c. nous en offrent les exemples.

Mais encore ne ſont ce que les éſpéces de pierres indïgénes au regne mineral, ſi j'oſe m'exprimer ainſi, qui forment l'ïdée de ces éſpéces de pierres. Car les petrifications, ainſi que les terres, les ſels, les bitumes & les minerais ne forment jamais ce qu'on appelle communément pierres de roche compoſées. Du moins ces derniers ne leur ſont pas eſſentiels.

Enfin ce ſont elles, qui d'aprés les obſervations que l'on a faites la deſſùs, compoſent la plûpart des montagnes tantôt primitives & tantôt celles de ſeconde ou de troiſieme formation, ce que j'indiquerai plus en detail ailleurs.

§. III.

Sur les différentes éſpéces, que l'on a rapportées au genre des pierres de roche compoſées.

Je commence par l'énumeration des éſpéces, que le chévalier de Linnée avoit nommées, & j'obſerve que:

1.) Son Saxum Helenae et Sahlbergenſe.
2.) Saxum vndulatum et ſtenonis.
3.) Saxum decuſſatum, molinum et garpenbergenſe.
4.) Saxum tritorium, Roeroſienſe et mareſtrandenſe.
5.) Saxum montanum et angermannicum.
6.) Saxum alpïnum et tinnitans.
7.) Saxum granoſum et punctatum & peut-ètre même.
8.) Saxum granites et fuſorium.

Ne ſont que ces 8. éſpéces que j'ai marquées ici, & que les denominations qui y ſont ajoutées ne déſignent pas, ſelon moi des

des éſpéces particulieres. Elles n'ont été faites peut être, que pour exprimer quelques particularités accidentelles, que le célébre chevalier de Linnée y avoit remarquées.

Pour ſon Saxum aethereum, Lapponicum, Bitsbergenſe et Dannemorenſe, je ne les connois point à cauſe de la definition vague, qu'il en avoit donnée.

Le nom de Granit ſemble être donné en général & dans la ſuite à des pierres de roche compoſées, dont toutes les parties conſtituantes ſont plus ou moins cryſtallines, & qui ne ſont liées enſemble par aucun ciment, ſans avoir égard à la Nature & au nombre de ces parties conſtituantes.

Le nom de Trap fut donné à des pierres argilleuſes ferrugineuſes melées de differentes éſpéces de pierres. Le Porphyre lui eſt analogue ſi non que la baſe eſt une argille plus endurcie & qui eſt paſſée au Jaſpe.

On a appellé cos, de la ſable liée enſemble & melée avec d'autres éſpéces de pierres. Les breſches en diffèrent en peu de choſe, ſi non que les parties conſtituantes y ſont plus viſibles. Les Poudingues leur ſont analogues.

Les modernes les ont commencé à conſiderer plus attentivement, & l'on ajouta quelques dénominations pour les diſtinguer plus mieux. Telles ſont le Gneuſſ, le Greis, le Saxum ollaris, Serpentinus ſaxoſus, ſaxum ſilicinum, corneus &c. Mais toujours l'idée, que l'on en avoit donnée etoit elle trés vague. Analyſons pour cela la claſſification la plus moderne de Mr. Haydinger. Le nom de Granit y ſignifie des pierres de 2, de 3, de 4, & même de 5. parties conſtituantes.

tes. La combinaiſon du Quarz avec le Feldſpath, celle de l'argille avec le Spath calcaire, celle du Quarz & Mica avec la Hornblende, celle de l'argille endurcie avec le Feldſpath y ſont nommées ſûrement deux fois, & ſour des noms tout à fait différents. La premiere ſous le nom de Granit & de Geſtellſtein, la ſeconde ſous celui de Saxum glanduloſum & de Trap, la troiſieme ſous celui de Granit & de Geſtellſtein, la quatrieme enfin ſous le nom de Porphyre & de Trap (*). Encore y trouve t-on des pierres trés analogues comme par exemple la combinaiſon de la ſteatite, Feldſpath & Mica, & celle de la Serpentine, Feldſpath & Mica trainées & ſeparées l'une de l'autre.

Pour donner du poids à ces ſortes de claſſifications, on nous renvoye communément à la Theorie des tranſitions des éſpéces l'une donc l'autre & nous dit que quoique par exemple le nom de Granit ſignifie proprement une combinaiſon du Quarz avec le Feldſpath & le Mica, cependant il y ait des cas, où l'une ou l'autre partie manque, & que quelque autre nouvelle prenne la place de celle qui manque, ou qu'il s'y ajoute quelque fois des parties nouvelles à celles, qui y ſont déja, par exemple le Mica manquant, dit on, le Schoerl ou la Hornblende occupe ſa place &c. D'accord; mais dans ces cas notre Granit ſera-t-il Granit? Imaginons nous un cas ou par exemple le Feldſpath manque, & qu'il n'y ait que peu de Quarz & beaucoup de Mica; cette derniere combinaiſon ſera t-elle encore du Granit? Sûrement non; les Mineralogiſtes la déſignent depuis longtems ſous le nom de *Geſtellſtein.*

Donc

(*) S. Syſtematiſche Eintheilung der Gebirgsarten von Carl Haydinger Adjuncten am K. K. Naturalien-Cabinet in Wien.

Donc bienque ces tranſitions d'une éſpéce à l'autre ſoyent trés prouvées dans la nature, elles ne peuvent cependant pas ſervir de baſe ſolide pour la claſſification des corps du regne mineral. De plus, que de telles tranſitions ſont tres inconſtantes & qu'il n'y en a jusqu'à préſent nulle regle fixe.

J'éſtime les merites du célébre Mr. Haidinguer & ce n'eſt pas pour le cenſurer, que je me ſuis autant étendu la deſſus; je n'ai voulu que propoſer mes idées ſur ces ſortes de claſſification en général.

Mr. le D. Höpfner (*) qui nous a donné auſſi une claſſification des différentes éſpéces de pierre de roche compoſées les a ſelon moi, encore plus confondues que Mr. Haidinger. Car pour reſter aux roches primitives, le nom de Granit y eſt donné pour les plus différentes combinaiſons de pierres qui puiſſent être, & peu embaraſſé de la nature des parties conſtituantes, il n'a diſtingué que leur nombre, & bien loin de les prendre pour baſe, il ne les a conſiderées que dans les ſous-diviſions &c. Telles ſont *Granites ſimplex*, celui qui eſt compoſé de 2. parties conſtituantes, *Granites vulgaris* celui de 3, & *Granites indeterminatus*, celui de 4. & de plus. &c. On pourroit dire le même du porphyre, car ſelon lui la combinaiſon de l'Argille & du Mica ſeroit auſſi bien Porphyre, que celle de l'Argille avec le Feldſpath, quoique ces deux éſpéces de pierre ſoyent trés différentes l'une de l'autre. (Voyez Tab. I.) Les Wakae & les Brecciae y ſont confondues auſſi. Mais la faute la moins pardonnable, c'eſt d'avoir nommé encore Baſalte une pierre, qui en eſt tout à fait differente & qui porte depuis longtems le nom de Schoerl.

Mais,

(*) S. Magazin zur Naturkunde Helvetiens. 1. Band.

Mais, aprés tout, qu'eſt ce que donc que le Granit? c'eſt une ſorte de Poudingue, nous dit on encore. Et voila encore de ces aſſertions faites pour confondre tout à la fois & la Science & ceux qui la cultivent. Mais Poudingue & Granit ſont deux noms differens, en quoi diffère donc proprement ce dernier de l'autre? c'eſt qu'une matière Quartzeuſe, dit on, y lie & enveloppe des cryſtaux de Feldſpath, de Schoerl & des paillettes de Mica? Mais où l'a t-on découvert, où l'a-t-on obſervé que c'eſt ainſi de la choſe? Sûrement nulle part; mais c'eſt qu'on s'eſt une fois imaginé, que le Granit tire ſon origine du Quartz. C'eſt donc une conſéquence que l'on tire d'une ſimple conjecture. Je ne dis rien de la conjecture, je me reſerve d'en parler ſous un autre article; mais pour la conſéquence elle eſt entièrement depourvûe de preuves. Et le Granit n'a jamais été Poudingue, ni ne le ſaura jamais être, car ſi enfin nous ne voulons confondre dans le regne mineral tout, les notions que nous avons du Poudingue ſont tout à fait différentes de celles de Granit. Que l'auteur des lettres mineralogiques adreſſées a Mr. le Profeſſeur Camper m'excuſe, ſi je m'y ſuis pris d'une maniére un peu forte; c'eſt pour l'amour de la ſcience & de la verité que j'ai dû m'en acquiter. Car enfin il eſt tems de la purgér de ces chimêres qu'enfante la phantaiſie.

Mais ni même ceux dont on devroit eſperer le plus de préciſion, n'ont point été ſi exactes dans les definitions qu'il n'y reſte encore trop de toutes. Je parle de Mr. l'Inſpecteur Werner (*) à Freyberg. Car ſans faire mention de la faute qui lui eſt commune avec autant d'autres, d'avoir pris pour

(*) Kurze Claſſification und Beſchreibung der verſchiedenen Gebirgsarten von A. G. Werner, Bergakademie Inſpector, und Lehrer der Bergbaukunſt und Mineralogie zu Freyberg. Dresden 1787.

pour baſe de definition & de claſſification des corps naturels, des proprietés qui n'exiſtent pas dans les corps mêmes, quelle idée pourra-t-on ſe faire par exemple de ſon Granit & du Gneuſs, & comment les diſtinguer l'un de l'autre. Le Granit, dit il, eſt une roche compoſée de Feldſpath, Quartz & Mica (à la page 7.). Le Gneuſs en eſt compoſé auſſi (à la page 8.). Tous les deux contiennent du Mica la moindre partie (à la page 7. & 8.). Le Gneuſs diffère du Granit en ce qu'il eſt ſchiſteux & fibreux. Mais le Mica étant en ſi peu de quantité, qui lui croira que cette pierre ſoit ſchiſteuſe & fibreuſe, car le Quartz & le Feldſpath ne prennent ſûrement par cette forme, du moins dans leur état naturel. Mais encore ſi même ce cas exiſtait réellement, les parties conſtituantes étant les mêmes & à peu de choſe prés dans la même proportion, je vois peu de raiſons pour les trainer l'une de l'autre. Ni même le permette leur formation probable, car ſelon l'aveu même de Mr. l'Inſpecteur Werner, il y a des Gneuss qui ſont d'un âge encore plus ſuperieur que quelques Granits. (à la page 10.) Mais la manière, dont il s'y eſt pris, la plus plaiſante c'eſt qu'il ajoute (à la page 9.): Que le Gneuss ſe diſtingue encore du Granit, en ce que le premier contient *quelque fois* des Grenats, & le dernier n'en contient que *trés rarement*. J'appelle mainterant au tribunal de tous les mineralogiſtes, ſi c'eſt une diſtinction vraiment philoſophique, ou ſi elle puiſſe être de quelque utilité dans la Science? Car *s'il n'en contient que trés rarement il en contient pourtant quelque fois.*

Je pourrai dire le même de ſon Porphyre & de ſon Mandelſtein (p. 12. & 13.). Car n'eſt ce point ſurement nommer une pierre deux fois, que de placer la combinaiſon

de l'argille endurcie avec la Hornblende & entre les Porphyres (*) & entre les Mandelſteins (**) &c.

Cependant eſt ce une faute, dont les mineralogiſtes de Freyberg ne ſont guere exempts. Et même je me reſſouviens de Mr. Karſten (***) d'avoir été content de definir le Hornſchiefer de Mr. Werner, que c'étoit une pierre noire avec des veines de Quartz.

Mr. l'Inſpecteur Werner nous a donné une claſſification des pierres de roche en général tant homogenes que compoſées, mais il l'a trop abregée pour l'importance de la matiére & a omis pluſieurs, qui devroit y être inſerées neceſſairement, comme le Trap &c. Il les a rangées d'aprés leur formation probable & les a diviſées en Roches primitives, ſecondaires, volcaniques & accidentelles. Mais combien ces ſortes de claſſifications contribuent peu à la vraye connoiſſance des corps naturels, prouve ſuffiſamment l'hiſtoire du Baſalte, car n'en deplaiſe à Mr. l'Inſpecteur Werner, ſa formation par la voye humide eſt encore trés loin de l'évidence requiſe. Et toujours ces claſſifications & définitiont reſteront inſuffiſantes, ſi elles n'auront pas un fondement plus ſolide. Les probabilités & les conjectures ne le pourront jamais être. Cepen-

(*) A l'endroit cité p. 12. Sie beſtehet aus einer Hauptmaße, die entweder verhärteter Thon, Jaſpis, Hornſtein, oder auch Pechſtein, und in welcher Feldſpat, Quarz uud Hornblende ꝛc. eingemengt ſind.

(**) A l'endroit cité p. 13. Mandelſtein. Dieſer iſt eine gemengte Gebirgsart, die eine eigne Geſteinart, welche ein verhärteter Thon zu ſeyn ſcheint. — & plus bas dit-il zuweilen ſind auch noch Hornblende Kriſtallen in ſie eingeſprengt.

(***) Voyez. Höpfners Magazin zur Naturkunde Helvetiens, dritter Band. pag. 213.

pendant elles ont autant d'empire ſur les Mineralogiſtes de nos jours qu'elles ſont même la matière principale, dont ils déduiſent les definitions comme c'eſt encore le cas dans Mr. l'Inſpecteur Werner. Les montagnes, dit il (à la page 5.) qui conſiſtent des pierres de roche primitives ſont les plus agées, & *portent toutes les ſignes* (donc le Baſalte auſſi) *de la formation par la voye humide.* Mais eſt ce une définition? Pour moi, j'en ſais d'aprés cette definition, autant que je ſavois auparavant. Les proprietés qu'il remarque aprés, qu'elles ſont ou homogènes ou compoſées, ne ſont plus ſuffiſantes, car même les montagnes de troiſième formation le pourront être. Mais lorsque (à la page 6.) il ajoute, qu'il y ait des roches primitives, ou une partie fait la maſſe principale de la roche, dans la quelle les autres éſpéces ſont diſperſées & iſolées, je compris à peine s'il y parle des pierres de roche primitives, ou des Grés & des Poudingues. Et cependant veut-on qu'on ajoute foi à ces Mineralogiſtes & cenſure ſi on n'eſt pas de leur ſentiment. Mais voila ce que fait l'autorité, & voila enfin ou nous y ſommes. Plus un naturaliſte eſt devenu célébre, & plus on le doit éxaminer, afin de n'être ebloui par l'eclat de ſa gloire. Même, dirai je, que l'aſſertion (à la page 7.) que le Mica ſe transforme dans la ſtéatite ne m'eſt point du tout pas probable, car les métamorphoſes ne ſont encore guêre prouvées dans la Nature.

En un mot, pour avouer nettement, avec l'auteur des lettres mineralogiques citées, plus on etudie les ecrits des Mineralogiſtes, & moins on y voit clair; plus on deſire de s'en former des idées nettes & preciſes, & plus on y trouve de désordre & de confuſion; l'un aſſerte ce que l'autre nie. Et la cauſe principale, c'eſt que les definitions ſont inéxactes, les dénominations vagues, & les ſyſtêmes chancellants. Si les Mine-

neralogiſtes auroient ſuivi la route que l'illuſtre chevalier de Linnée a tracée, la ſcience en auroit profité. Car quoiqu'on diſe, Mr. de Linnée etoit le methodiſte le plus ſolide & le plus rigoureux qui puiſſent être. C'eſt ſur tout dans le choix des caractéres que l'on devroit agir le plus rigoureuſement, & alors la pluspart des diſputes ceſſeroient & tous ſeroient d'accord.

Pour preuves encore de ce que j'ai avancé ſerviront les exemples ſuivants.

Wallerius ajouta des noms à des pierres qui les avoient deja, & confondit pluſieurs éſpéces de Mr. de Linnée avec les ſiennes comme le *Saxum tinnitans* avec ſon Trap, & le *Saxum tritorium* avec ſon *Saxum molare* &c.

Mr. Haydinguer a mélé avec le vrai Granit le *Saxum morenſe & fatiſcens* de Linnée, ainſi que le *Saxum fornacum* avec le *Saxum molare* de Wallerius, & avec le *Saxum alpinum* ou *tinnitans* de Linnée.

Le Gneiss de Mr. Haydinguer eſt autre choſe que le Gneiss de Mr. Werner, & le Gneiss de Mr. Werner presque le même que le Granit.

Mr. Werner a confondu le Porphyre avec le *Saxum ſibiricum* de Linnée & avec le *Saxum metalliferum* Bornii & même avec la combinaiſon de la pierre de corne avec le Mica. Mr. Haydinguer a été plus éxacte dans la definition du Porphyre.

Le Nom de Trap eſt en general trés vague.

Le Saxum metalliferum Borni eſt à peu de choſe prés le même que le Gneiss, du moins ſuivant la deſcription de Mr. Haydinguer.

On

On ne ſait pas jusqu'à préſent bien ce qu'eſt le Porphyrſchiefer & le Topasfels de Mr. Werner &c.

§. IV.
Claſſification des pierres de roche compoſées.

J'ai donné plus haut la définition générale des pierres de roche compoſèes.

J'en fait maintenant 4. grandes ſections & je les diviſe en pierres de roche compoſées criſtallines, en pierres de roche non criſtallines, en pierres de roche conglutinées & en pierres de roches volcaniques.

Les pierres de roche compoſées criſtallines ſont celles, où du moins une partie eſt vraiment criſtalline, & dont les parties conſtituantes ne ſont liées enſemble par aucun ciment.

Les pierres de roche compoſées non criſtallines ſont celles, où aucune partie conſtituante eſt criſtalline, mais cependant ſans aucun ciment auſſi bien que dans les premieres.

Les pierres de roche compoſées conglutinées ſont celles, dont les parties conſtituantes tant criſtallines que non, ſont liées enſemble par quelque ciment, & j'y comprend tant les breſches, les poudingues, que même les grés, car même ces derniers, autant que j'ai pu obſerver, contiennent toujours un ciment plus ou moins viſible. Les cas, ou ils n'en contiennent point ſont trés rares.

Et comme il y en a ſûrement des matieres differemment alterées par le feu ſouterrein, qui préſentent quelque fois auſſi des pierres de roche compoſées, j'en ferai la 4. ſection. Mais comme malgré les nombreuſes découvertes, que l'on a faites là deſſus, perſonne n'a encore developpé leurs proprietés d'une maniere qu'on les puiſſe reconnoitre en tous lieux & en tous cas, il eſt imporrible d'en donner une definition ex-

Digitized by Google

exacte. On pourroit bien dire en général que ces matiéres ſont plus ou moins fuſibles, & ſouvent même attirables par l'aimant, trouées ou vitreuſes par dedans, cependant ces caractéres ſont, comme on voit, bien trés inſuffiſantes. Auſſi en parlerai je plus en detail dans la ſeconde partie de cet Eſſay ſur les pierres de roche compoſées.

Pour le Baſalte j'avoue, que je ne puis encore être d'avis avec Mr. l'Inſpecteur Werner. Je ſouhaite pour cet égard qu'il nous veuille donner une deſcription exacte de ſon Baſalte, tant ſuivant ſes qualités exterieurs que ſuivant ſes propriétés chimiques.

§. V.

Claſſification des pierres de roche compoſées criſtallines.

Je n'ai pris pour baſe de ma claſſification que leurs parties conſtituantes, & j'y ai conſideré tant leur nature, que leur nombre. Mes raiſons pour cela ſont: 1.) Que d'aprés l'aveu de presque tous les mineralogiſtes & ſuivant la ſaine raiſon ce ne ſont que les parties conſtituantes, qui ſont la difference réelle entre les corps du regne mineral. 2.) Que d'aprés les obſervations, que l'on a faites jusqu'à préſent, tant que les parties conſtituantes changent, même la nature entiere des montagnes qu'elles forment, & même la nature des mineraux qu'elles contiennent, changent auſſi. 3.) Que la connoiſſance, que nous en aurons ſera plus ſolide, ſi nous en conſiderons les parties conſtituantes, que ſi nous n'en conſiderons que la forme éxtérieure, qui varie beaucoup ſuivant les cas, & enfin 4.) Que je n'ai voulu avoir pour baſe de claſſification & de definition que des caractéres, qui exiſtent réellement dans la maſſe des corps, dont il s'agit.

Je

Digitized by Google

Je diſtribue donc toutes les pierres de roche compoſées cryſtallines en leurs claſſes, ordres, genres & eſpéces, & j'ai ſuivi à cet égard en quelque maniére la methode du célébre Mr. de Kirwan.

Les parties conſtituantes les plus dominantes feront l'idée de mes claſſes, & les parties conſtituantes, qui quant à la quantité occupe une ſeconde place feront mes ordres. J'ai fixé les genres ſuivant leur nombre. Mais comme les parties conſtituantes d'une claſſe peuvent encore être de differente nature j'ai diſtribué les genres en leurs familles, auxquelles ſuccèdent enfin les éſpéces. Les differentes formes extérieures feront ſelon moi les varietés.

Mais en même tems dois je remarquer, que je ne conſidère ces pierres que tant qu'elles ſont pierres, & non comme des pierres qui conſtituent les montagnes, & c'eſt ce que les commençans & même les mineralogiſtes en général doivent connoitre avant que d'entreprendre de fixer la nature des montagnes.

Chacun pourra fixer aprés les quelles d'entre elles forment les montagnes primitives ou ſecondaires &c. Car en fait de théorie, la choſe principale c'eſt de connoitre bien les corps dont il s'agit.

Pour la nature des parties conſtituantes je l'ai fixée d'aprés les expériences des plus habiles chimiſtes; cependant il ſe peut bien, que je m'y ſois trompé, & ſi quelqu'un la trouve autrement, je ſuis tout prêt à corriger mes fautes.

METHODVS NOVA ACETVM CONCENTRANDI, EIVSQVE ACIDVM AD FORMAM SOLIDAM CRYSTALLINAM ABSQVE OMNI MIXTIONE PERDVCENDI.

Auctore
TOBIA LOWITZ.

Conuent. exhib. die 10 *Febr.* 1791.

§. 1.

Poſtquam per tres iam annos, tentaminibus inſtitutis quam copioſiſſimis, detegendae meliori acetum concentrandi methodo omnem operam dedi, eamque inprimis ex frigoris in hoc acidum effectu, obtinere allaboraui: contigit mihi tandem, eſſe tam felici, tales vt inuenirem encheireſes, quibus ſumma aceti concentratio effici queat, acidoque ipſius forma adeo cryſtallina conciliari quam pulcherrima.

§. 2. Iam quidem Il. Comes de Lauragais acetum radicale forma cryſtallina ex aerugine obtinuit, ex cuius deſtillatione, quae vltima obtinetur aceti radicalis pars, eam in cryſtallos concreſcere vidit magnas, laminoſas ſpiculiſque ſimiles, hanc-

hancque ipſam obſeruationem Marchio de Courtenvaux repetito tentamine comprobauit. Neque tamen eadem omnium de iſtarum cryſtallorum natura opinio; eas pro aceto glaciali habuit cl. Durande; Il. de Courtenuaux pro compoſito quodam ex acido vegetabili et principio phlogiſtico; cl. denique Leonhardi pro ſale metallico, ſimili albo ſali illi metallico, quod acido aceti et cupro conſtat, quodque, obſeruante cel. de Laſon, ſub finem deſtillationis aceti radicalis, aucto igne, adſurgit. (Macquers chem. Wörterbuch überſezt von Hrn. Leonhardi, 3 Th. S. 355.).

§. 3. Acetum radicale, ex aeruginis deſtillatione dum eleuatur, inſignem particularum cuprearum copiam ſecum rapere ſolutam, neminem chemicorum fugit, ex quo quidem facilis videtur concluſio, aceti formam iſtam cryſtallinam (§. 2) deberi particulis metallicis, quae acidum hoc, vel ſaltem aliquam eius partem, ſalis metallici natura induant. Hinc hodienum quoque diſputant chemici, acidum aceti ſitne eiusmodi naturae, vt forma ſe veſtiri ſolida patiatur, aut vero (quae complurium et peritiſſimorum quorundam opinio eſt) ſitne ex ea acidorum claſſe, quae propria ſua natura permanentis ſunt fluiditatis, nec ſolidam formam admittunt vllam.

§. 4. Propriis vero meis experientiis perſuaſum mihi nunc habeo, aceti acidum purum reuera eſſe cryſtalliſabile, dummodo omnibus ſuperfluis priuetur partibus aquoſis, quippe quae hoc in caſu perinde ac reſpectu omnium ſalium cryſtalliſabilium in genere cryſtallorum formationi impedimento ſunt. Methodum enim inuenire mihi contigit, cuius beneficio neceſſaria iſta partium aquoſarum ſegregatio obtinetur, ſine vllo praeuio acidi aceti cum aliis ſubſtantiis heterogeneis connubio; qua igitur methodo mea commodiſſime accidit, vt eſſentialis

 quae-

quaedam acidi mutatio, cuius non eſt nulla in aliis ſuſpicio, pertimeſcenda ſit nulla. Ante vero quam haec vberius exponam, haud reor alienum fore aut inutile, pleniorem praemittere expoſitionem dedectae a me tribus iam abhinc annis methodi, acetum vini per congelationem concentrandi, qua ipſa quoque methodo hic Petropoli in Pharmacopoea Imperiali alcohol aceti conficere inde ab illo tempore mihi ſollemne eſt.

§. 5. Primus, qui aceti frigore concentrandi auctor ſuaſorque fuit, cel. Stahlius eſt. Neque tamen ſimplici hac methodo acetum pro medicis vſibus ſatis concentratum euadere, neque etiam heterogeneis priuari particulis, videbatur; vnde magnam chemici in eo collocauerunt operam, procedendi modum alium vt inuenirent, quo vtriusque voti ſimul fierent compotes; qua in re quam felici ſucceſſu cel. Weſtendorff elaborauerit, notiſſimum eſt. Contigit tamen mihi anno 1786, vt acetum ad concentrationis gradum longe majorem perducerem, poſtquam, rei cardinem in exactiſſima particularum ſpirituoſarum ſegregatione verſari, obſeruaſſem, vtpote quae vti frigore magis magisque concentrantur, ita vlteriori partium aquearum congelationi obſtant, talesque ſimul excogitaſſem encheireſes, quibus alcohol aceti tam ab empyreumate, quo ſub deſtillationis proceſſu inquinatur, quam ab aliis heterogeneis particulis perfectiſſime liberari queat.

Negotium omne ad ſequentia redit:

§. 6. Aceti vini, frigoris ope modo conſueto concentrati, quantitas quaecunque deſtillationi ſubmittatur per retortam ex mariae balneo; prior qui tranſit liquor ſpirituoſus ſeorſim exhibeatur. Recipienti autem pro aceto inſequente non eſt ſubſtituendus alter, niſi perſuaſum tibi habeas, liquori in retorta ſuperſtiti particularum ſpirituoſarum iam nihil inhaere-

re,

re, id quod ex eo videre eſt, ſi vna vel duae liquoris deſtillantis drachmae, vaſi cuidam patulo et calefacto infuſae, flamma admota, ignem non concipiant; quo obſeruato, mutatoque recipiente, deſtillatio continuetur eo usque, donec nihil iam tranſiuerit.

§. 7. Acetum hoc deſtillatum, propter particularum ſpirituoſo-inflammabilium defectum, frigori, cui in lagena denuo exponendum eſt, nunc quam facillime obedit, ita, vt remanentis poſt priorem congelationem aquae copia maxima iam in glaciem abeat. Sic frigore 180 graduum ſcalae Del'Islianae aceti alcohol ſatis ad medicos vſus concentratum obtineri poteſt.

§. 8. At acetum hoc ſemper odoris empyreumatici et ſaepe flaui coloris eſt, quibus vitiis exponam qua ratione queat liberari. Primo igitur iteratis aliquoties rectificationibus ex mariae balneo bina iſta vitia corrigi poſſunt: vbi quidem notandum eſt, ſub finem cuiuscunque rectificationis ſummopere caueri debere, ne, quod iam deſtillatum eſt acetum, inſequente ſemper ſub finem empyreumate denuo inquinetur; quam ob rem hoc tempore receptaculum mutari neceſſe eſt. Rectificationum harum prior in mariae balneo ad ſiccitatem vsque perduci non poteſt; quia fixiores partes empyreumatico-oleoſae fortiſſimis aceti particulis intime vnitae fuſci magmatis ſub forma in retorta remanent. In ſubſequentibus vero rectificationibus acetum non niſi maculam relinquit flauam, a qua, finita quacunque deſtillatione, rerortam purgari oportet.

§. 9. Quae licet ita ſe habeant; detecta tamen a me anno 1785 carbonum vis dephlogiſticatrix hoc quoque in caſu, perinde ac in permultis aliis, egregium praeſtare vſum valet; taediosis nimirum ſupradictis rectificationibus iterum ite-

rumque iterandis (§. 8) plane nihil opus eſt, ſi alcoholis aceti empyreumatici rectificatio ſuper carbonum puluerem ex mariae vel arenae balneo inſtituatur ea ratione, vt 10 aceti partibus 2 vel 3 carbonum partes pondere impendantur, quo efficitur, vt deſtillatio, ſi in mariae balneo adornatur, ſine vllo empyreumatis metu et ſine excipuli mutatione quam tutiſſime eousque continuari, donec ne guttula quidem amplius tranſierit, ſicque carbonum beneficio alcohol aceti vnica rectificatione ab omni empyreumate prorſus liberari queat.

§. 10. Saepiſſime accidit, flauum colorem vt aſſequatur acetum, quod vitium, quia nec rectificationibus per ſe, neque ipſo etiam carbonum acceſſu corrigi poteſt, magnam mihi et diuturnam moleſtiam attulit. Color hic flauus a particulis quibusdam oleoſis originem repetere videtur, eodem ac ipſum acetum volatilitatis gradu praeditis. Feliciter tamen contigit mihi, eiusmodi vt potirer tandem procedendi modo, quo principium iſtud tingens quam perfectiſſime ſeparari, acetique alcohol aquae ad inſtar limpidiſſimum obtineri poteſt. Separationem hanc facile vidi eiusmodi liquoris ope effectum iri, qui non tantum maiorem habeat cum principio illo oleoſo affinitatem, ſed acetum quoque volatilitate ſuperet. Qualem liquorem acetum ipſum, pars ſcilicet eius ſpirituoſo - inflammabilis, copioſe mihi ſuppeditat; cuius quidem operationis ratio ita ſe habet: pars ſpirituoſa, in priori aceti congelati deſtillatione ſeorſim excepta (§. 6), repetitis rectificationibus, vel ſalis etiam tartari ſicci ope, omnibus partibus phlegmaticis liberetur; liquoris huius, phlegmate prorſus orbati, 4 circiter partes, 10 alcoholis aceti empyreumate coloreque flauo inquinati partibus, cum ſupra dicta carbonum pulueris quantitate iamiam mixtis, addantur, et deſtillatio modo ſupra oſtenſo ex mariae balneo ſuſcipiatur. Hac in deſtillatione additus

ditus ſpirituoſus liquor in veram abit aceti naphtham, quae vi eximiae volatilitatis ſuae ſtatim ſub deſtillationis initio citiſſime tranſit, et partes tingentes, quibus acetum colorem ſuum flauum debet, tam perfecte ſecum rapit omnes, vt inſequens ei aceti alcohol, mutato excipulo, ad ipſum deſtillationis finem vsque ſtatu quam puriſſimo limpidiſſimoque, aquae ad inſtar absque vllo colore, obtineatur. Qui quidem ſingularis et optatus effectus etſi plane nunquam fallit: interdum tamen, ſed raro, fit, vt adiectus ſpirituoſus liquor prima hac rectificatione veram naphthae naturam nondum acquiſiuerit, quo caſu partium tingentium ab aceto ſeparatio locum prius non habet, niſi, tranſtillatis omnibus particulis ſpirituoſis, et remanenti in retorta aceto denuo affuſis, repetita fuerit deſtillatio.

§. 11. Spontanea haec verae aceti naphthae formatio, anno 1786 a me detecta, cel. Scheelii ſententiae prorſus eſt contraria, qua aceti naphtham oriri non poſſe, niſi praeſente acido quodam mineralis proſapiae ſtatuit. (Chem. Annalen 1784 St. 10. S. 342). Neque minus cl. pharmacopoeus Voigt (Taſchenbuch für Scheidekünſtler 1783. S. 2) tam ex aceto, quod per nouam fermentationem reſidui cremati frumenti ſibi comparauit, quam ex duarum menſurarum aceti pomorum gallici cum 8 ſpiritus rectificatiſſimi vnciis mixtione inſignem naphthae copiam deſtillatione obtinuit; id quod, ne concentrationem quidem ad producendam naphtham eſſentialiter neceſſariam eſſe, demonſtrat.

§. 12. Aceti naphtha principio iſto flauo tincta ſingulare id habet, quod colorem ſuum aureo flauum, ſolis expoſita radiis, cito prorſus amittit; amiſſum tenebris expoſita, recuperat. Cetérum nullo hucusque artificio principium illud tingens naphthae adimere po ui. Sic acetum quoque flauo hoc colore

colore imbutum, ſoli ſi fuerit expoſitum, plane at longe tardius exuitur colore ſuo, in tenebris reduce.

§. 13. Alcoholis aceti ſuauitatem augere licet, ſi 10 eiusdem partibus vna vel duae partes ſpirituoſi liquoris ſupradicti, (§. 10) omni phlegmate orbati, admiſceantur.

§. 14. Quae de aceto per frigus concentrando in ſuperioribus expoſui, accuratiſſime ſi obſeruentur omnia, atque inprimis, ſi commendata partis ſpirituoſae ſeparatio (§. 6) omni, quo fieri poteſt, ſtudio efficiatur; tum per frigus 195 vel 200 graduum ſcalae Del' Islianae, aceto talis concentrationis gradus conciliari poteſt, vt alcoholi aceti Weſtendorfiano parum concedat, Ehrenreichiano hoc reſpectu longe antecellat, et puritatem ſuauitatemque quod attinet, perfecte ei aemulum videatur.

§. 15. Pedem nunc ad id, quod caput in hac diſſertatione eſt, profero, nouam a me inuentam expoſiturus methodum, qua acetum ad ſummam concentrationem acidumque eius ad cryſtalliſationem vsque perducere mihi contigit.

Magma empyreumatico-acidum, quod in aceti empyreumatici rectificatione in retorta remanet, dixi ſupra (§. 8) retinere bonam acidi fortiſſimi portionem, quae mariae balneo non tranſeat. Quae poſtea ſi fortiori arenae balneo deſtilletur, tranſit cum acido oleum empyreumaticum, acidumque eo maiori empyreumatis quantitate inquinatur. Prorſus autem aliter res ſe habet, vbi aceto ab empyreumate purgando carbonum puluis adhibetur (§. 9): dum, finita in mariae balneo eius deſtillatione, ex remanente carbonum puluere, qui ſiccus plane apparet, vehementiori arenae igne 3 vel 4 vnciae aceti fortiſſimi

ſimi tranſeunt, ſubflaui quidem coloris, nullo attamen empyreumate contaminati.

§. 16. Eiusmodi aceti (§. 15), quod Weſtendorfianum concentrationis gradu longe ſuperabat, 10 circiter vncias die 5 Decembris anni 1788 frigori 193 graduum eo fine expoſui, vt viderem, poſſitne poſtea, frigoris artificialis ope, intendi adhuc eius concentratio. At praeterlapſo fere vnius horae ſpatio, acetum hoc naturali frigore congelatum deprehendi: quod inopinum prorſus phoenomenon eo magis miratus ſum, cum ſcirem, aliud hoc longe debilius acetum frigori naturali vel vehementiſſimo expoſitum congelationi prorſus reſiſtere.

§. 17. Glaciem iſtam (talis enim mihi plane viſa eſt), perforaui, perinde ac acetum congelatum tractare ſoleo, vtque liquorem inter eius interſtitia ſuperſtitem ſepararem, vitrum alii vitro inuerſum ſuperimpoſui, frigorique expoſitum reliqui. Elapſo 5 dierum interuallo, 4 circiter aceti vnciae guttatim in ſuppoſitum vitrum defluxerunt; acetum hoc nunc ſaturatiorem, quam ante coagulationem, colorem referebat, odoris vero contra opinionem meam longe debilioris mihi videbatur. Ad feneſtram conclauis mei adhuc 4 aceti vnciae e relicta in vitro glacie effluxerunt.

§. 18. Superſtitem in vitro glaciem ita mihi viſam, dum ad feneſtram non liqueſceret, furno calefacto impoſui, vbi breui tempore in limpidiſſimum, quem aquam eſſe initio putaui, liquorem abiit. At naribus eo admoto, ecce maxima mea admiratione eam percepi aceti concentratiſſimi fortitudinem, quam antea in ea, quae frigori reſtitit, parte liquida (§. 17) percepi nunquam.

§. 19. Liquor modo dictus (§. 18), duas vncias pendens, ad feneſtram denuo collocatus, breui tempore rurſus in maſſam Solidam camphorae ſimilem abiit, quod eo magis miratus ſum, cum nunc ſcirem, aquam ob loci temperiem congelari non poſſe. Nunc demum nihil fere dubii reſtabat, concretum hoc eſſe aceti acidum quam concentratiſſimum, et quae prima fronte viſa fuit congelatio (§. 16) eam veram aceti cryſtalliſationem fuiſſe.

§. 20. Ex parte liquida (§. 17) a priori cryſtalliſatione ſuperſtite, frigori denuo expoſita, dimidiam adhuc vnciam aceti eiusmodi glacialis obtinui, quod vero priori debilius deprehendi, maius enim frigus cryſtalliſatio eius poſtulabat, tantum ſcilicet propemodum, quantum ad aquae congelationem requiritur.

§. 21. Plura, quae cum nouo eadem ac ſupra (§. 15) ratione parato aceto ſuſcepi, tentamina edocuerunt me, euentum nunquam non eſſe eundem. Accidit quondam, vt in altera eiusmodi aceti cryſtalliſatione magnas, perpulchras, pellucidiſſimas, regulares, et diuerſimode ſeſe inuicem decuſſantes obtinuerim cryſtallos, figurae oblongo-rhomboidalis, pollicem vnum cum dimidio longas, ſemipollicem latas, et lineam dimidiam craſſas. At cryſtalli hae quarum formoſius exemplar adiungo, propter largam aquae cryſtalliſationis copiam, adeo erant ad liqueſcentiam pronae, vt aëris temperie 145 graduum iam in liquorem abierint.

Tab. IV. fig. 6.

§. 22. Hac via, cryſtalliſationem innuo, aceti acidum, ſalua naturali eiusdem mixtione, ſummo puritatis ſtatu obtinetur. Separatio omnium particularum heterogenearum, inprimis oleoſarum, hoc artificio perfectiſſima fit; dum eae cum illa

debi-

debiliori aceti parte, quae, perfecta cryſtalliſatione, a cryſtallis forma fluida decantatur, arctiſſime coniunctae remanent. Res ſimili modo ſe habet, ac in aliorum ſalium per cryſtalliſationem depuratione, vbi heterogenea itidem cum muria ſeparantur.

§. 23. Proprietates aceti glacialis quod attinet; ſequentes easque non niſi phyſicas exponere mihi hac in diſſertatione licet, quia perpulchrum hoc productum, ob nimis paruam, qua hucusque potitus ſum, eiusdem quantitatem, conſeruare, quam chemico examini impendere, mihi optabilius eſt.

a) *Odor* aceti glacialis liquefacti vehementiſſimus eſt naribusque intolerabilis.

b) *Sapor* acidiſſimus. Vna huius aceti gutta linguam vrente per 20 horas ſuperſtite dolore afficit.

c) Contactui acetum hoc oleum pingue mentitur.

d) In cutem cauſticam vim exſerit, rubefacit vritque et veſicas excitat.

e) Volatilitate aquam longe ſuperat; in calore 135 graduum tribus minutis aceti noſtri gutta in auras abit, cum ſimilis aquae gutta, ceteris paribus, non niſi 80 minutis aëre diſſoluatur. Eximia haec aceti noſtri volatilitas eo magis miranda eſt, cum aceto ordinario contrarium prorſus accidere conſtet, ex cuius deſtillatione notiſſimum eſt, partes debiliores aqueas volatilitate acidis antecellere, quae non niſi ſub fine deſtillationis tranſeunt.

f) In deſtillatione acetum glaciale leniſſimo etiam calore quam citiſſime, idque ex parte vaporum alborum forma,

 ma,

ma, tranſit; in excipulo et retortae collo naphtharum more ſtrias pingues format.

g) Si deſtillatio aceti huius vehementi frigore in aëre libero inſtituitur; in excipulo vndique ad inſtar florum Benzoes micantes cryſtalli oriuntur, totumque excipuli ſpatium interius tenuiſſimae niuis ad inſtar replere videntur. Accidit interdum, vt hac occaſione, finita deſtillatione, pentagona eximiae tenuitatis, dimidium circiter pollicem interdum lata, vno tantum angulo ſuo roſtri retortae extremo margini inſidentia, appareant, quae prismaticos colores omnes pulcherrime exhibent.

h) Grauitas aceti glacialis ſpecifica ad eam aquae ſe habet, vti 1,0574 ad 1,0000.

i) Concentrationis gradum quod attinet, acetum glaciale ad alcohol aceti Weſtendorfiani ſe habet vt 9 ad 4.

k) Summus caloris gradus, quo acetum glaciale fortiſſimum formam ſolidam conſeruare poteſt, 125 graduum Thermometri Del' Isliani eſt. Hinc acetum tale, cryſtalliſatum in caueam obſeruatorii Pariſini, cuius conſtans temperies 131 graduum eſt, deportatum, ibi continuo formam ſuam cryſtallinam conſeruaret.

l) In cochleari ſupra candelam calefactum, acetum hoc, admoto igne, flamma coerulea conſumitur.

m) Reagentia in acetum glaciale aqua dilutum perinde, ac in acetum purum deſtillatum, agunt.

§. 24. Ipſa aceti glacialis cryſtalliſatio varia offert memoratu haud parum digna. Ex ſalium magno numero nullum, quod phoenominorum varietate et elegantia cum aceto gla-

glaciali aequipararari poſſit, mihi cognitum eſt, quae quidem varietas et elegantia ex nimia acidi aceti volatilitate aeque, ac ex facillima ipſius liqueſcentia originem repetit, qua fit vtraque, vt phaenomena haec, quoties placuerit, inter breue tempus reuocari queant, cum manuum calor liqueſcentiae, calor 135 graduum cryſtalliſationi ſufficiat.

§. 25. Inter aceti glacialis cryſtalliſationem et aquae congelationem mira ſimilitudo intercedit, eaque in ſequentibus potiſſimum phaenomenis cernitur:

a) In vitro probe clauſo acidum hoc, frigoris gradui quam in libero aëre, longe maiori abſque eo, vt cryſtalliſetur, ſuſtinendo par eſt; vitri autem concuſſione, vel, quod praeſtat, admiſſo ſimul aëre externo, per omnem, quanta eſt, maſſam ſuam extemplo coagulatur.

b) Cryſtalliſatio aceti, ſi paulatim fit, ramoſis ſerratisque figuris, ex vitri lateribus liquorem transmeantibus, perinde ac aquae congelatio, incipit.

c) Hoc in caſu aceti ſuperficies tenui et laeui cruſta ſpeculari ſe induit.

d) Latera interiora vacuae vitri partis interdum pulcherrimas ramificationes cryſtallinas variis figuris ſtellaribus, quales feneſtrae offerunt hiemali tempore, interſperſas oſtendunt.

e) Aceto glaciali in cryſtallos abeunte: aëris haud exigua, atque adeo ea, quae in aquae congelatione obſeruatur, longe maior copia, bullarum paruarum forma conſpicitur.

Digitized by Google

Atque haec ſunt potiſſimum, in quibus tanta cryſtalliſationis aceti noſtri cum aquae congelatione ſimilitudo cernitur, vt memorabile hoc productum aceti glacialis nomen iure ſibi meritoque vindicare poſſe videatur.

§. 26. Sunt vero et alia in quibus magnum inter vtramque diſcrimen cernitur.

a) Idem eſt in aqua congelationis et liqueſcentiae gradus, 150 nempe graduum ſcalae Del'Islianae; diuerſus non nihil in aceto glaciali, ita, vt, quod in calore 125 graduum liqueſcit, glaciale acetum, non niſi in calore 132° vel 135° graduum in cryſtallos abeat.

b) Aceti glacialis volumen cryſtalliſatione mirum in modum diminuitur, parsque ſolida liquidae non ſupernatat, cuius contrarium fieri in aquae congelatione novimus.

§. 27. Sunt etiam nonnulla aceto glaciali plane propria cryſtalliſationis phaenomena:

a) Elegantiſſima eorum ea proprietate nituntur, qua acidum hoc in vitro clauſo detentum, et certo gradu refrigeratum, non niſi vitri concuſſione et liberi aëris aditu in cryſtallos abit (§. 25. a). Quo in caſu, pro vario aceti refrigerationis gradu ſequentia apparent phoenomena varia.

α) Sub debili refrigeratione ingens tenuiſſimorum triangulorum aequilaterorum per omnem aceti maſſam hinc inde natantium copia, quae omnes colores prismaticos exhibent, conſpicitur. Accidit quoque hoc caſu, rariſſime

ſime tamen, vt omnes hic delineatae figurae regulares cum pulcherrimo colorum prismaticorum luſu ſimul conſpiciantur. Figurae hae cryſtallinae ſub ipſo ortu admodum paruae breui tamen poſt tempore ſenſim ſenſimque vitri fundum petentes ad delineatam magnitudinem excreſcunt. Tab. IV. fig. 7.

β) Prorſus aliter res ſe habet, ſi paulo maior ſit aceti refrigeratio; nunc figurae, niui ſimillimae, ſtellatae quinque et ſex radiis diſtinctae apparent, quae leniter vitri fundum petunt, labenteſque, ſuaviſſima oculorum voluptate, volumine creſcunt.

γ) Maior ſi ab initio fiat refrigeratio, globoſo-radiatae figurae delabuntur in fundum, quae ocyſſime volumine augentur.

δ) Exſpectato autem vltimo refrigerationis puncto, liquor, aperto vitro, per omnem, quanta eſt, maſſam momento coagulatur.

Pulcherrima haec cryſtalliſationis phoenomena aeſtiuo etiam tempore produci poſſunt, ſi vitrum acetum glaciale continens, glaciei aqua mixtae ad collum vsque immergatur.

b) Elegans quoque phoenomenon conſpiciendum ſe praebet, acetum glaciale aquae congelantis ſtigori ſi exponitur; tum breui tempore poſt coagulationem ipſius, in lateribus partis ſuperioris vitri multitudo lamellarum micantium nec non flammularum ſplendentium coloresque prismaticos referentium adparet, id quod in vitri vacua parte ſingulare offerr ſpectaculum. Flammulae hae adeo tenues interdum ſunt, vt propter perfecti-

fectiſſimam pelluciditatem non niſi certa oculi poſitione percipi queant.

c) Si vitrum quatrangulare, aceto glaciali cryſtalliſato ſemiplenum, ita ad hypocauſti feneſtram collocatur, vt latere vno feneſtram immediate attingat, tum acetum, pro vario inter externam et internam temperiem diſcrimine, inter 145 et 130 gradus caloris nunc ex parte liqueſcit, nunc denuo coagulatur, idque ea ratione, vt in illa, feneſtram quae attingit, vitri parte coagulatum ſemper acetum, in auerſa vero ad fundum vsque liquidum maneat. Sicque pars liquida, in partem vitri feneſtrae contiguam eamque frigidiorem, ſenſim ſenſimque in altum aſcendit, ibidemque coagulatur et, elapſo aliquot hebdomadum interuallo, alteram dimidiam calidiorem vitri partem ad fundum vsque vacuam prorſus et ſiccam relinquit ita, vt id vitri latus, cui nunc omnis aceti maſſa ſemipellucida muri ad inſtar adiacet, ante cryſtalliſationem fundum vitri fuiſſe diceres.

d) Vehementi frigore hiemali ex hypocauſto calido acetum liquidum aëri libero in vitro clauſo expoſitum, per aliquot tempus liquiditatis ſtatum conſeruat, mox per omnem maſſam ſuam in albiſſimam quaſi niuem momento coaleſcit.

e) Vt autem acetum glaciale leni et regulari tranſitu in cryſtallos concreſcat, neceſſe eſt, vt acetum hoc iamiam coagulatum manuum calore ea cautione liqueſcat, vt portiuncula ipſius haud magna non liquefacta in fundo relinquatur; quo facto, maſſa haec in loco iuſto, coagulationi apta temperie gaudente, collocata, breui tempore ſupra dictae (§. 25. *b*) cryſtalliſationis

quaſi

quaſi frondeſcentis primordia oſtendit. Non raro fit, vt hac occaſione ex aceto in vitri parte vacua ad latera cryſtalli acinaciformes aſcendant, et vitri fornicem aſſecutae in aduerſo latere ad aceti ſuperficiem deſcendant; quod phoenomenon eo melius ſuccedit, ſi acetum iamiam coagulatum, in tali loco ponitur, vbi aëris temperies ea eſt, vt paruo eius diſcrimine acetum mox liquefieri, mox in cryſtallos abire, incipiat; quam 126 gradibus thermometri Del'Isliani reſpondere reperi.

Atque haec ſunt potiſſimum, quae de aceti glacialis proprietatibus hucusque mihi detegere licuit, quaeque cum Ill. Acad. communicare operae pretium exiſtimaui; alia, quae vlteriores de hoc argumento disquiſitiones meae mihi ſuppeditant, alii diſſertationi reſeruo.

Digitized by Google

DESCRIPTION DES MINES DE WOËTSK ET HISTOIRE DE LEUR EXPLOITATION.

Par

N. OZERETSKOVSKY.

Préſenté à la Conférence le 30 *Mai*, 1791.

Les montagnes du Gouvernement d'Olonetz offrent pluſieurs indices des différens minéraux, qui ſont déja découverts dans plus que 500 endroits: il y avoit des riches particuliers qui entreprenoient d'en exploiter quelques-uns, mais ils les trouverent fort ſteriles & les abandonnerent tous. La couronne même n'en reſerva pour elle qu'une ſeule mine de fer pour la fonderie de Petroſavodsk, & abandonna auſſi les mines d'argent de l'isle Medvegey dans la mer blanche & les mines d'or de Woëtsk, où l'on avoit travaillé pendant 36 ans & quelques mois. l'Hiſtoire de ces travaux mérite d'être connue, & je me propoſe de l'expoſer, après avoir donné quelques notices ſur la minière de Woëtzk.

Cette minière ſe trouve près du lac Wyg & de la riviere du même nom, qui coule dans la mer blanche & dont l'embouchure n'eſt eloignée de Woëtzk que de 80 werſtes.

La

Digitized by Google

La montagne nommée Woëtzkaya, laquelle a fourni l'or, eſt ſituée entre le lac & la riviere Wyg, & environnée d'eau de trois cotés; c'eſt-à-dire, du coté d'occident elle eſt arroſée par la riviere Wyg, & des cotés d'orient & de ſeptentrion par le lac du même nom. Sa direction s'étend du midi vers le nord; le coté le plus eſcarpé de cette montagne regarde la riviere, & par ſes autres cotés elle s'abbaiſſe vers le lac. Elle eſt large de 580 toiſes, depuis le bord du lac juſqu'à la riviere, du niveau delaquelle ſa plus grande élévation eſt de ſix toiſes et deux archins.

Cette montagne eſt compoſée du quartz griſatre mélé de talc & de mollecules micacées; au milieu de ces ſubſtances il y a une veine métallique qui s'etend d'orient vers l'occident, & dont l'orifice eſt à la ſurface de la montagne & ſon diametre tantot d'un arſchin tantot d'un arſchin & demi. C'eſt de cette veine, remplie de quartz & de ſubſtances métalliques, qu'on tiroit, pendant pluſieurs années, différens métaux, & principalement l'or, le cuivre, l'argent natif en petites mollecules, & quelquefois auſſi le plomb. On y trouvoit ces métaux avec le quartz blanc & rougeatre, mélé quelquefois de ſpath vitreux, & avec les pyrites cuivreuſes jaunes & rougeatres, ou diverſement colorées; & c'eſt toujours avec ces dernieres & avec le quartz rougeatre, qu'on obtenoit le plus d'or de cette veine.

Elle fut découverte en 1737 par un payſan du village Woëtskaya, ſitué à un werſt de la montagne; ce payſan, après avoir ramaſſé quelques morceaux des pyrites luiſantes, les préſenta au gouvernement des mines de Petroſavodsk, dans l'eſpérance d'être recompenſé pour ſa découverte; mais le dit gouvernement n'en fit point cas & n'y penſa qu'après cinq ans écoulés; c'eſt-à-dire ce ne fut qu'en 1742 qu'on commença à

 exploi-

exploiter la mine de Woëtsk, dans l'intention d'en obtenir du cuivre, ſans ſoupçonner, qu'il y ait de l'or. Après deux ans de tems, le comptoir des mines à Moscou fut informé par un habile homme, qui avoit fait le voyage à Woëtsk, qu'avec les pyrites cuivreux on tiroit du veritable or; ce qui fut denoncé à l'Impératrice Eliſabeth, & Sa Majeſté, en 1744, le 15 Décembre, ordonna qu'on y travaille avec plus de diligence, & qu'on ſe donne tous les ſoins poſſibles d'y chercher de l'or. En vertu de cette ordonnance il fut enjoint à M. Schamchew, Officier des mines, d'examiner bien les mines ſurtout par rapport à l'or, dont on ſoupçonnoit l'éxiſtence. M. Schamchew en trouva effectivement parmi le quartz & les pyrites colorées, mais en ſi petite quantité, qu'en le ſéparant des autres ſubſtances par la voie du lavage, on perdoit plus d'argent que ne valoit l'or, car il arriva ſouvent que le prix d'un gros d'or montoit jusqu'à 20 roubles. Les dépenſes de ce genre firent, que le Sénat dirigeant confera la direction des mines de Woëtzk à l'expédition de Nertſchinsk, en 1756; cette expédition, pour s'informer de l'état de ces mines, y envoya M. Keller, Officier des mines, qui s'y rendit dans la même année; & étant de retour à St. Pétersbourg, il rapporta à l'expédition, que la veine de la minière de Woëtzk eſt devenue plus étroite qu'elle n'étoit auparavant; que la quantité du minéral s'y diminue, & que les eaux, en coulant par les fentes, inondent tous les ouvrages, de ſorte que les ouvriers, en les pompant ſans ceſſe, ne peuvent point venir à bout; enfin, que le voiſinage de la riviere Wyg empeche de détourner ces eaux de la minière, dans laquelle quoique il ſeroit poſſible d'entailler la roche pour une place ſuffiſante à la conſtruction d'une machine à élever les eaux par le moyen des chevaux, mais la profondeur du puits rendroit toujours ce travail fort pénible. L'expédition de Nertſchinsk,

ſchiask, après avoir examiné toutes les dépenſes, cauſées à la Couronne par l'exploitation de ces mines, propoſa ſon ſentiment au Sénat dirigeant, que pour tirer de cette minière tout le minéral qui y eſt contenu, il faudroit oter tous les ouvriers aux autres mines d'Olonetz, & les employer à Woëtzk, pour y achever les travaux & envoyer enſuite les mineurs aux mines de Sibérie. Mais cette repréſentation demeura ſans réponſe, & l'on continua de travailler à Woëtzk jusqu'à 1764. Dans cette année le College des mines, s'étant auſſi informé de l'état de cette minière, a fait les mêmes repréſentations au Sénat, & en 1770 il fut ordonné de ſuſpendre les travaux de Woëtzk & de faire publier, que s'il y avoit des gens aſſés riches, qui voudroient ſe charger de l'exploitation des mines de Woëtzk, ils n'ont qu'à ſe préſenter au College des mines. Perſonne n'a paru; toutefois en vertu de l'ordonnance on abandonna la mine & on renvoya les ouvriers aux fondéries de Petroſavodsk.

Pendant 26 ans des travaux, on a obtenu de cette mine 61 livr. 71 gros d'or, & 4233 pouds de cuivre, & pour obtenir tout cela, on a dépenſé 84831 roubles 83 ſols.

Cependant il ne ſe paſſa plus qu'un an, quand M. de Soymanow, préſident du Collége des mines, étant à Pétroſavodsk en 1772, envoya à la minière de Woëtzk M. Karamychew, alors officier de mines, pour s'aſſurer, ſi cette mine meritoit effectivement d'être abandonnée. M. Karamychew s'y rendit en hyver, il trouva quelques mollecules d'or dans le ſable de la fabrique du lavage ainſi que dans la mine tirée du puits, que l'on prenoit pour ſtérile; & envoyant ſon or à M. de Soymanow, il lui rapporta, que la mine de Woëtzk ne manque point d'or, mais qu'on néglige de le ſépa-

 rer

rer comme il faut. C'étoit déja aſſez pour y renouveller les travaux; & dans la même année (1772), au mois d'Avril, le college des mines ordonna à la chancellerie de Petroſavodsk de reprendre les travaux à la mine de Woëtzk. La chancellerie y envoya trois officiers, M. M. Gladkow, Schurlin & Nordhaus; ils arriverent à Woëtzk le 28 de Mai, & trouvant la minière pleine d'eau, ils la firent pomper avec des machines manuelles; on y travailloit trois mois entiers, jusqu'au 5 d'Octobre, & quand le puits fut vuide, on recommença d'entailler la mine au ciſeau & au marteau, & dans l'eſpace de trois ſemaines on obtint par le lavage 63 gros d'or; mais en même tems on en retira 1 livre 28¼ gros en morcēaux. Cet heureux ſuccès fit renaitre l'eſpérance, & le college des mines, au lieu de pompes manuelles, auxquelles 80 hommes étoient deſtinés, ordonna de conſtruire une machine à éléver les eaux par le moyen des chevaux. Dans l'eſpace d'un an la machine étoit achevée; elle a couté 749 roubles 29¾ ſols.

Avec toutes les peines cependant, qu'on ſe donnoit pour tirer plus d'or de cette mine, on n'en obtint pendant dix ans & quatre mois, que 2 poudes 39 livres, 48 gros, & nommément pendant les deux derniers mois de l'année 1772, 3 livres 86¾ gros, en 1773, 10 livres 63 gros, en 1774, 10 livres 92¼ gros, en 1775, 16 livres 3½ gros, en 1776, 18 livres 35¾ gros, en 1779, 14 livres 91¾ gros, en 1780, 7 livres 75¼ gros, en 1781, 2 livres 66½ gros, en 1782, 4 livres 25¼ gros, en 1783, pendant deux mois de travail, 45¾ gros. Mais dans ces mêmes années on a auſſi fondu du cuivre 2146 pouds 22 livres. Tout ce gain a couté à la couronne 59197 roubles 20¾ ſols. Il mérite d'être remarqué que dans

dans cette mine on trouvoit quelquefois des morceaux d'or péſans depuis une livre jusqu'à 3 livres & 40 gros.

On voit par ce détail, qu'il y avoit des années, où la mine donnoit plus d'or que dans les autres, & qu'à la fin elle en a fourni le moins. Il faut remarquer, que quoique en genéral cette mine n'étoit jamais riche en or, cependant on en obtenoit toujours une plus grande quantité, auſſi longtems que les pyrites cuivreuſes étoient de couleur rouge, & que le quartz, mélé d'une portion de ſpath, continuoit auſſi d'être rougeatre; mais ſitôt que ces ſubſtances parurent blanches & jaunâtres, la quantité d'or diminua conſidérablement; enſorte qu'en 1781 un ſeul gros d'or a couté à la couronne 21 roubl. 50¾ ſols. Au reſte il étoit très difficile de travailler dans la minière à cauſe de ſa profondeur de ſoixante toiſes & deux arſchins, & comme il n'y avoit point des puits collatéraux, qui pourroient renouveller les courans d'air; il eſt arrivé ſouvent, que dans les tems pluvieux ou nebuleux, la fumée de la poudre qu'on employoit pour l'exploitation des mines entaillées, s'accumulant dans les ſouterrains, étouffoit tellement les mineurs, qu'à peine on pouvoit leur ſauver la vie, en les retirant promptement du puits. De pareils accidens y furent même très fréquens à cauſe du voiſinage de la riviere & du lac, qui engendrent des brouillards & rendent l'Atmoſphere humide. Pour éviter tout malheur, on fut obligé de ſuſpendre les travaux pour deux ou trois jours; non obſtant cela il falloit payer les ouvriers, ce qui augmentoit les depenſes & rendoit l'or encore plus cher. Toutes ces raiſons enſemble déterminerent enfin le Sénat dirigeant, en 1783 le 4 Mars, d'abandonner la mine de Woëtzk pour la ſeconde fois.

Ainſi,

Digitized by Google

Ainſi, pendant plus de 36 ans des travaux, on n'a obtenu de ces mines que 4 poudes 21 livr. 23 gros d'or, & 6379 poudes 22 livres de cuivre; pour cela on a dépenſé en tout 144029 roubles. Il faut avouer, que ces dépenſes ſont très conſidérables; cependant les mines de Woëtzk ne doivent & ne peuvent ôter l'eſpérance, qu'il n'y ait point des mines beaucoup plus riches dans ce pays, fécond en minéraux, & dont on a déja découvert tant d'indices, comme je l'ai dit ci-devant. L'énumeration de ces minéraux découverts & même eſſaiés pourroit donner quelques idées de la conſtitution des montagnes de cette contrée ſeptentrionale; maïs je reſerve cette matiere pour un autre mémoire.

NOVAE

Digitized by Google

NOVAE SPECIES PLANTARVM;

DESCRIPTAE

a

P. S. PALLAS.

Conuent. exhib. die 29 *Octob.* 1792.

Aliquot frutices Roſſicae Florae poſt edita prima operis Botanici Volumina, quibus eorum congeneres ſpecies iam expoſitae ſunt, e ſeminibus, vulgari ſub denominatione communicatis, in horto colui et tanquam nouas ſpecies agnoui. Eas hic volui Botanophilis exponere, vna cum ſtirpibus duabus aliis, nondum, quod ſciam, deſcriptis, quarum alteram ſemina a Chirurgo legionario in tranſitu per Caucaſum lecta, alteram e Noua Hollandia per Amicum Londinenſem accepta, dederunt. Primum locum poſtulat:

I.

Amygdalus pedunculata.

Tab. VIII et IX.

Fruticem elegantiſſimum, quem *Gmelinus* ſen. cum Amygdalo nana confudit, diligentiſſimo Botanophilo *Ludouico Patrin*, Lugdunenſi, debemus, qui illum primus circa Ircutiam, ad An-

 garae

garae fl. ripas, determinate obſeruauit, eiusque ſiccum ſpecimen, et maturas nuces iam anno 1785. transmiſit, quae in ollis aeque ac horti area cito et laete germinarunt. Poſtea iterum a defuncto amico Alexandro Karamyſchef, et nuper a Pharmacopoeo diligentiſſimo Dn. Sievers copioſas nuces ad Selengam lectas eiusdem fruticis accepi, et amicis exteris communicavi, e quibus producti fruticuli etiamnum apud me, lentius in olla, ſed viuide in ſolo horti creſcunt, et triennes iam floreſcere coeperunt.

Germinant autem nuces non, vti Amygdali nanae, poſt annuam in terra moram, ſed menſtruo, vel bimeſtri ſpatio poſtquam terrae commiſſae ſunt, foliaque primordialia quaterna exſerunt, infima oppoſita, ſtipulis bifidis ſetaceis, vno alteroue dente ſetaceo ſerratis, ſtipata; ſuperiora dein alterna eua dunt, vt ſunt in toto deinde frutice. Creſcit lentius Pruno ſibirica. Intra quadriennium vlnares et ſeſqui-vlnares excreſcunt frutices in ſolo libero, in olla vix bipedales. Sponte ad orgyalem altitudinem, truncis pollicari diametro vix craſſioribus, adoleſcunt, et inter reliqua arbuſta, ad ripas fluminum ſicciores, in glareoſo ſolo occurrunt; ſemper ramoſiſſimi, dumoſi, ſeu incondite ramoſi; in laetiore tamen ſolo virgatis ramis, ſed magis patulis, quam Amygdali nanae.

Radix fibroſo-ramoſa, copioſiſſima, flauiſſima. *Truncus* ſubflexuoſus, ab imo ramoſiſſimus, *ramis* alternis, patentiuſculis, *cortice* fuſco-teſtaceo, laeui veſtitis. *Gemmae* alternae, pleraeque tantum foliiferae; ſparſae floriferae in ramulis annotinis. Foliaſcit ſimul et floreſcit menſe Maio, in auſtralibus trans Baicalem maturius; fructum circa Irchutiam initio Auguſti perficit. Petropoli floruit, iam explicatis foliis, paulo ante Amygdalum nanam.

Folia

Folia e ſingulis gemmis inferioribus terna vel quaterna, in ſummis ramulis alterna, vix pollicaria, glabra, ouata, petiolata, baſi attenuata integra, ſurſum profunde ſerrata, apice ſaepe retuſa. *Stipulae* ſetaceae, ſubpubeſcentes, vti petioli et rhaches ſubinde foliorum.

Flores e gemma foliacea laterali, vel ſine foliis e gemma ſimplici, bini vel ſolitarii, ſparſi, raro in ramulis terminales, longius pedunculati, pedunculis rectis, patentibus.

Perianthium baſi ventricoſum, rubens, coronatum laciniis 5 ad 7 lanceolatis, ſubſerratis, patulis. *Corolla* petalis 6 vel 7 ovalibus, niueis, vix roſeo-rubicundulis. *Stamina* circiter 21, filamentis albis, baſi rubellis; antheris pallido flavis. *Piſtilli* germen vndique piloſiſſimum; *ſtylus* longitudine ſtaminum, ſtigmate truncato. Receptaculum floris intra calycem luteum, melliferum.

Fructus longiuſcule pedunculatus, extus pubeſcens, ouato-ſubgloboſus, exſuccus, gryſeo-vireſcens. *Nux* ouato-acuta, ventricoſa, hinc parum vel vix carinata, facile bipartibilis, pallide luteſcens. *Nucleus* vix amaro, gratiſſimo, amygdalino ſapore pollet.

II.

Pyrus elaeagrifolia.

Tab. X. **Tom. VII.**

Arborem volo, quam Celeb. *Tournefort* in Aſia minore et Armenia obſeruatam, nomine „Pyri ſylueſtris orientalis, „folio oblongo incano„ (*Corollar.* 43.) indicauit. Hocce *Tournefortii* ſynonymon prius credidi ad Pyrum ſalicifoliam

 (*Flor.*

(*Flor. roſſ. Tom. I. Part. I. tab. 9. p. 20. itiner. III. p. 734. n. 93. tab. N. fig. 3 A B.*) pertinere, donec ipſius arboris a *Tournefortio* obſeruatae exempla per amiciſſ. *Carolum Hablizl* Eq. e Cherſoneſo taurica accepi; qui tamen ipſe ſpeciem, in topographia ſua Tauridis (Географическое описанїе Таврической области p. 107.) cum eadem noſtra Pyro ſalicifolia confudit. Obſeruante eodem haec Pyri ſpecies in montanis tauricae cherſoneſi vbique ſyluatica eſt, dumeta et ſatis magnas quoque arbores efficiens; ramis ſpineſcentibus armata, et albida foliorum lanugine e longinquo conſpicua. *Fructus* idem addit ſubgloboſos, ſatis magnos et ſucco diffluentes eſſe, vt, per inſitionem emendati, haud ignobile hortorum additamentum efficere poſſe videantur.

Accedit haec ſpecies, quantum iudicare poſſum e ſpeciminibus ſiccatis floridis et e ramis inſititiis, quos e Taurica acceptos, truncis Mali domeſticae impegi, optimo cum ſucceſſu: accedit, inquam, ad Pyrum niualem Celeberr. *Iacquin* in Florae auſtriacae vol. II. tab. 107. delineatam et graphice deſcriptam. Nec facile quis, ſine repetita vtriusque arboris in horto comparatione, diiudicauerit an vere diſtinctae ſpecies ſint conſtituendae, vel a loco natali metamorphoſin paſſae varietates? Comparatio etiam fructuum inſtituenda eſſet, quos ego nondum vidi. Interim igitur, dum haec tempus doceat, deſcriptionem et iconem arboris tauricae ſuppeditabo.

Rami craſſi, teretes, ſubnodoſi, ſed rectiſſimi, teſtaceo-fuſci, iuniores tenui lanugine veſtiti. *Ramuli* laterales, qui folia et flores e gemmis proferunt, etiam craſſiores, breues, rugoſo - annulati, patentiſſimi.

Folia ex apicibus ramulorum faſciculata, pedunculata, ovato - oblonga, obtuſa, integerrima, ſubtus, petioloque craſſa

lana

Digitized by Google

lana albo-tomentoſa, ſupra obſcure-vireſcentia, tenuique lanugine obducta.

Flores inter folia, non ex omnibus gemmis, in vmbella ſeſſili ſuboctoni, longius pedunculati. *Perianthium* cum pedunculo tomentoſo-album, laciniis quinque reflexis, acutis, breuibus. *Petala* alba, oblonga, magnitudine vnguis; vnde flores multo minores quam in P. communi et niuali. *Stamina* longitudine petalorum, *antheris* maiuſculis. *Styli* quinque, longitudine fere ſtaminum, filamentis craſſiores.

III.

Aſtrantia maxima.

Tom. VII. Tab. XI.

Semina ſero autumno, ad primas fere niues, in tranſitu per Oſſetiam, in ſummis Caucaſi iugis pratenſi loco lecta, cum aliis a Chirurgo legionaria huc tranſmiſſa, ante biennium in horto ſata, produxerunt plantam ſpecioſam, ab Aſtrantia maiore heluetica ſatis diuerſam, vt videatur pro diſtincta ſpecie ſtabiliri poſſe. Habitu quidem ad Aſtrantiam maiorem (quam etiam Caucaſus, ſed locis minus alpeſtribus, profert) prope accedit; ſed differt egregie foliis radicalibus ternatis, parum lobatis, vix ſerratis, ſed potius ciliatis, caulinis ſubſimplicibus, inuolucris ciliatis; praeterquam quod omnibus partibus longe maior eſt et ſpecioſior.

Radix biennis, imo forte perennans, capitata, fibris nigris aucta. *Folia* radicalia longiſſime (ad 9 pol.) petiolata, ternata; *foliolis* ouatis, ſubtrineruiis, pollicis latitudine, ſubſerratis, interdum obſolete lobatis, ad ſingulas ſerraturas ſpinula ſetacea ciliari inſtructis. *Caulis* teres, fere bipedalis, erectus, ſimplex, ſulcatus, foliis tribus omnino inſtructus, quorum *infimum*

Digitized by Google

mum ſtipula cordata, lata, ſerrato-ciliata, amplexicauli petiolatum, ternatum, radicalibus caeteroquin ſubſimile; *ſecundum* in medio caule ſimplex, ſeſſile, ouatum, octoneruium; *ſummum* binatum vel ternatum, ſeſſile, ramuliferum, foliolis ſpinuloſo-ciliatis trinerviis, vix quidquam ſerratis. Interdum duo folia caulina ex alis vmbellulam minorem in ramulo proferunt.

Vmbella terminalis magna, ſpecioſa, e floribus circiter 70. Inuolucrum 10 ad 12-phyllum, intus rubicundum, foliolis, eleganter venoſis, ouato-lanceolatis, acutis, ciliato-ſerratis, baſi albo marginatis, dorſo virentibus. *Flores* et ſemina oblongo-linearia, muricata, vt in Aſtrantia maiore.

Floruit apud me Auguſto et Septembri.

IV.

Anciſtrum? apetalum.

Tom. VII. *Tab. XII.*

E ſeminibus ex Anglia, a *D^no^ Lee* anno 1789. acceptis, triennio in olla creuerunt plantae, quas ex habitu, antequam floruerunt, pro ſpecie Potentillae habui; eoque magis, quod admodum adſtringenti folia erant ſapore et per totam hyemem, etiam a gelu tacta, in viridario laete vigebant. Quarto demum anno, in ollas grandiores transplantatae, aliquot plantae floruerunt Iunio, Julioque, adeo prompte excreſcentibus et defloreſcentibus ſcapis, vt vix vllum ſimile exemplum viderim. Agnoui tum ad Diandras eſſe referendam, et ſtatim ex habitu in promptu erat plantam cum *Anciſtro FORSTERI* (in Character. generum plantarum maris auſtralis tab. 2.) coniungere, cuius ſpeciem *ſcandentem* in herbario habeo. Sed conferenti fructificationem magna diſcrepantia in oculos incidit; defectu maxime corollae et calycis forma; fructum enim cel.

For-

Forſter non videtur perfectum obſeruaſſe, ſaltem non ſatis explicite deſcripſit. Nihiloſecius, quum in aliis quoque plantarum generibus, Campanula, v. gr. Cucubalis, Swertiis, Rhamno, Salſola, Spiraea, *caet.* vix minores aberrationes in ſtructura partium fructificationis obſeruentur; non potui a me impetrare, vt pro diſtincto genere plantam traderem, quam interim ſub *Anciſtri* dubio nomine hic deſcribam.

Habitus Poterii, et praeſertim *Anciſtro ſcandenti FORST.* proxime ſimilis. *Radix* ligneſcens, copioſiſſime fibroſa, teſtaceo-ferruginea. *Caudex* ſupra terram ligneſcens, calami cygnei craſſitie, rigidus, ſupra terram ramos 4 vel ſex patulos, verſus terram reflexo-adſcendentes, circa mediam ſtipitem exſerens, qui nouis ramis dein pullulant. Truncus et rami ſcarioſi reliquiis teſtaceis foliorum et petiolorum, per plures annos non putreſcentium, dum e centro ramorum noua continuo folia exſeruntur.

Folia imbricata, pinnata, villoſo-caneſcentia, ſubtus fere argentata; *rhachi* ſeu petiolo rigidiuſculo, canaliculato elongata, baſi dilatato, ſubvaginante, villis ciliato, obſolete carinato-trinerui. *Foliola* quinque parium cum impare, ouata, ſerrato-inciſa, inferiora minora.

Floreſcit planta partim ex alis ſuperiorum petiolorum, extenſo ramo remotioribus et tunc valde gibbis, partim caule e centro rami elongato, dodrantali vel pedali et ſeſquipedali, cui capitulum globoſum terminale, et foliola alterna, aliquot florum glomerulos in alis foventia.

Flores conglomerati, ſeſſiles: *calyx* ſuperus, parvus, plerumque quinquefidus, ſtellatus; extus villoſus, laciniis apice ſubbarbatis. *Corolla* nulla. *Stamina* duo, calyce haud longiora, *antheris* craſſis, fuſco-purpuraſcentibus, didymis, polline pallido.

do. *Germen* inferum viride, tetragono - tricarinatum, carinis rubro denticulatis; *ſtigmata* duo e centro calycis, ſeſſilia, ſublacera, glanduloſo - hiſpida, rubicunda. *Flos* terminalis capituli ſexfidus, triandrus.

Poſt deflorationem germen cito excreſcit in *nucem* vel ſemen oſſeum, turbinato - trigonum, muricatum, calyce explanato, coriaceo, laeuigato, ſtellato coronatum, infra adtenuato-ſubpedunculatum, cuius carinae productae ſpinis planis, latis dentatae, latera muricata. *Nucleus* cylindraceo - oblongus.

Planta omnis odoris expers, maxime adſtrictoria et cuius partes difficillime putreſcunt. — *Icon* plantam exprimit absque ramis floridam, qualis, inter plures ramoſas, vnica mihi enata eſt.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

Digitized by Google

Digitized by Google

OBSERVATIO
ECLIPSIS SOLIS
ANNO 1791. DIE $\frac{23 \text{ Mart.}}{3 \text{ April.}}$ PETROPOLI HABITA.

Auctore

STEPHANO RUMOVSKI.

Conuent. exhib. die 25 Aprilis, 1791.

Illa ipſa die, in quam Eclipſis Solis incidit, nec non die ſequenti captae ſunt altitudines Solis correſpondentes, ex quibus prodiit

Die 23 Martii meridies verus ad horol. - - 0ʰ. 22′. 8″, 5
24 - - - - - - - - - - - 0. 25. 28, 4

	Temp. Horol.	Temp. ver.
Sole per nubes lucente, limbo tamen eius ſat bene terminato indicium Eclipſis cernere mihi videor -	3ʰ.19′. 0″.	2ʰ.56′.27″
Certus ſum Eclipſin Solis incepiſſe -	3. 19. 4.	2. 56. 31

Poſt modum Sol nubibus denſioribus tegebatur, quam vt diſtantia cornuum vel magnitudo partis lucidae Solis menſurari potuerit. Circa medium tandem Eclipſis Sole tenuioribus nubitus tecto quater menſuraui partes lucidas; Eclipſi vero ad

 finem

finem vergente caepi non nullas diſtantias cornuum. Obſervationes iſtas, cum Eclipſin ad calculum reuocauero, Academiae ſum expoſiturus.

	Tempus Horol.	Tempus verum.
Finis Eclipſis coelo ſereno -	$5^h. 44'. 20''.$	$5^h. 21'. 27''.$

Obſeruatio initii aeque ac finis peracta eſt tubo Gregoriano duorum pedum, partes vero lucidae ac diſtantiae cornuum captae ſunt tubo achromatico tripedali, micrometro obiectiuo inſtructo.

METHO-

MÉTHODE À LA PORTÉE DES NAVIGATEURS POUR RÉDUIRE EN DISTANCE VRAIE LA DISTANCE APPARENTE DE LA LUNE AU SOLEIL OU À UNE ETOILE FIXE.

Par

M. KRAFFT.

Préſenté à l'Académie le 12 *Mai*, 1791.

1.)

Depuis que les Tables du mouvement de la Lune ont été portées à un point de perfection qui ne laiſſe que très-peu de choſe à deſirer, on eſt presque généralement d'accord, que de tous les moyens que l'Aſtronomie offre à la Marine pour la détermination de la Longitude ſur mer, les obſervations des diſtances de la Lune au Soleil ou à quelque autre Etoile fixe connue, ſont celui qui, après les Montres marines, mérite d'être adopté préférablement. Le ſuccès de cette méthode dépend de deux choſes; la premiere eſt le degré d'exactitude avec la quelle, non obſtant les roulis du Vaiſſeau ſur une forte mer, le Navigateur meſure la diſtance des deux Aſtres, en prenant auſſi leurs hauteurs & en déterminant par une bonne Montre le tems de l'obſervation; la ſeconde eſt la préciſion du calcul qu'il eſt obligé de faire, pour dégager la diſtance appa-

Digitized by Google

rente, la ſeule que l'obſervation puiſſe lui donner, des effets de la réfraction & de la parallaxe, afin d'en obtenir la diſtance vraie & d'en comparer le tems obſervé ſous le Méridien du Vaiſſeau, à celui que les Ephémérides nautiques lui indiquent pour cette même diſtance vraie ſous le Méridien du Port ou de quelque autre endroit connu. La Marine réuſſit à ſatisfaire à la premiere de ces deux conditions, au moyen du Secteur à réflexion de Hadley; elle y ſatisferoit bien plus encore, en employant pour la meſure des diſtances, au lieu de ce Secteur, des inſtrumens plus parfaits, tels que le Cercle nautique de Tob. Meyer, perfectionné par Magellan (*), ou auſſi le Mégamètre inventé par Charnières (**), qui joint aux avantages de l'Heliomètre de Bouguer celui d'une courſe beaucoup plus grande & étendue au moins jusqu'à 10 degrès d'élongation. La Trigonométrie ſphérique donne pour la ſeconde condition, une regle abſolument rigoureuſe.

2.) Mais quelque précis que ſoit le réſultat de cette regle, elle n'eſt que peu propre à l'uſage de la Marine, parce que, pour que l'application en ſoit ſure & aiſée, il faut que le Calculateur ſoit au fait de la Théorie trigonométrique, & habitué à la pratique des Logarithmes; l'une & l'autre pourroient bien n'être pas à la portée de tout Obſervateur marin. Du grand nombre des transformations tres-ingénieuſes que pluſieurs Mathématiciens (***) ont apportées à cette regle, pour en ſimplifier l'emploi en faveur de la Marine, il n'eſt aucune dans la quelle on ne rencontre la même difficulté, & il

(*) Voyés Nov. Acta Acad. Scient. Petrop. Tom. I. Hiſt. pag. 141.

(**) Voyés Mem. de l'Academie des Sciences de Paris. Année 1767. Hiſt. pag. 133.

(***) Mr. Lyons, Witchell, Dunthorne, Maskelyne, Borda, Lexell & d'autres.

Digitized by Google

il en eſt pluſieurs qui renferment encore une autre ſource de mepriſe poſſible de la part du Calculateur, en le mettant dans la néceſſité de faire une attention ſcrupuleuſe à la différence des cas de l'obſervation, & à celle des procedés du calcul qu'elle demande; auſſi l'Académie de Paris a-t-elle jugé néceſſaire pour le bien de la Marine, il n'y a encore que deux années, de propoſer le Problème: *Trouver pour la réduction de la diſtance apparente de deux Aſtres en diſtance vraie, une méthode ſure & rigoureuſe, qui n'exige cependant dans la pratique que des calculs ſimples & à la portée du plus grand nombre des Navigateurs.*

3.) Je me propoſe dans ce Mémoire, de ſoumettre au jugement des Aſtronomes un Eſſay d'une pareille méthode, qui bien qu'elle ne ſoit pas encore abſolument telle qu'on pourroit la deſirer, ſemble cependant ſatisfaire aſſes bien aux conditions qu'on preſcrit avec raiſon pour la ſolution de ce Problême, & approcher plus qu'aucune autre que je connoiſſe, de cette ſimplicité qu'on s'eſt appliqué de tant de maniéres â établir dans cette partie importante du calcul nautique.

Problème.

Réduire en diſtance vraie la diſtance obſervée du centre de la Lune à celui du Soleil ou d'une Etoile fixe, les hauteurs apparentes des centres des deux Aſtres & la parallaxe horizontale de la Lune pour le tems de l'obſervation, étant données.

Solution.

Soit d .... la diſtance obſervée
t .... la difference des hauteurs obſervées
X .... la diſtance vraie cherchée
} des centres des deux Aſtres.

Soit

Soit auſſi H .... la différence des hauteurs vraies des centres, calculées d'après les hauteurs obſervées

& ω .... un angle tel, que

$$\text{coſ. } \omega = 0,5001343 \cdot \frac{\text{coſ. haut. vraie du centre ☾}}{\text{coſ. haut. appar. du centre ☾}}.$$

Cela étant, on trouve la diſtance vraie cherchée de la maniére ſuivante:

1.) Ajoutés enſemble les ſinus verſes des trois angles H, $d + \omega$ & $d - \omega$,

2.) Ajoutés enſemble les ſinus verſes des deux angles $t + \omega$ & $t - \omega$,

3.) Prennés la différence de ces deux ſommes.

4.) Cette différence ſera le ſinus verſe de la diſtance vraie cherchée.

Demonſtration.

Soit l'angle formé au Zenith par les cercles verticaux paſſants par les centres des deux Aſtres ou la différence de leurs Azimuts = Z. Deſignons pour abréger, les hauteurs apparentes des centres de la Lune & du Soleil ou de l'Etoile fixe par [H *a* ☾] & [H *a* ☉], & leurs hauteurs vraies par [H *v* ☾] & [H *v* ☉], & nous aurons, par les principes connus de la Trigonométrie ſphérique pour la reſolution d'un triangle dont les trois cotés ſont donnés,

$$\text{ſin. } (\tfrac{1}{2} Z)^2 = \frac{\text{ſin. } \frac{d+t}{2} \cdot \text{ſin. } \frac{d-t}{2}}{\text{coſ. } [H\, a\, ☾] \cdot \text{coſ. } [H\, a\, ☉]},$$

& auſſi

$$\text{ſin. } (\tfrac{1}{2} Z)^2 = \frac{\text{ſin. } \frac{X+H}{2} \cdot \text{ſin. } \frac{X-H}{2}}{\text{coſ. } [H\, v\, ☾] \cdot \text{coſ. } [H\, v\, ☉]},$$

d'où

Digitized by Google

d'où l'on obtient l'Équation:

$$\text{ſin.}\,\frac{X+H}{2}\,.\,\text{ſin.}\,\frac{X-H}{2}=\text{ſin.}\,\frac{d+t}{2}\,.\,\text{ſin.}\,\frac{d-t}{2}\,.\,\frac{\text{coſ.}\,[H\,v\,☾]}{\text{coſ.}\,[H\,a\,☾]}\,.\,\frac{\text{coſ.}\,[H\,v\,⊙]}{\text{coſ.}\,[H\,a\,⊙]}\,.$$

Or puiſque par l'effet combiné de la réfraction & de la parallaxe ſur les hauteurs de la Lune & du Soleil, & par celui de la ſeule réfraction ſur la hauteur de l'Etoile, on a

$[H\,v\,☾] > [H\,a\,☾]$ & conſéquemment $\frac{\text{coſ.}\,[H\,v\,☾]}{\text{coſ.}\,[H\,a\,☾]} < 1$, &

$[H\,v\,⊙] < [H\,a\,⊙]$ & conſéquemment $\frac{\text{coſ.}\,[H\,v\,⊙]}{\text{coſ.}\,[H\,a\,⊙]} > 1$ & < 2,

il y aura toujours deux angles z & y tels que

$$\frac{\text{coſ.}\,[H\,v\,☾]}{\text{coſ.}\,[H\,a\,☾]}=\text{coſ.}\,z \quad \& \quad \frac{\text{coſ.}\,[H\,v\,⊙]}{\text{coſ.}\,[H\,a\,⊙]}=2.\,\text{coſ.}\,y\,,$$

de façon que

$$\text{ſin.}\,\frac{X+H}{2}\,.\,\text{ſin.}\,\frac{X-H}{2}=2.\,\text{coſ.}\,z\,.\,\text{coſ.}\,y\,.\,\text{ſin.}\,\frac{d+t}{2}\,.\,\text{ſin.}\,\frac{d-t}{2}.$$

Or on voit d'abord, que l'on peut, ſans aucun préjudice à la préciſion du calcul, prendre ici le coſ. y pour une quantité conſtante, car ſoit qu'il s'agiſſe du Soleil ſoit d'une Etoile fixe, cet angle ne varie que de 18 ſec. environ, entre les limites $[H\,a\,⊙] = 0$ & $[H\,a\,⊙] = 5°$; il devient abſolument conſtant ſavoir $y = 59° 59' 27''$, desque l'Aſtre á plus de 10° de hauteur. On ſait que les obſervations des hauteurs moindres que 5°, ſont elles mêmes tres-incertaines à cauſe de l'inconſtance de la réfraction, & que l'on ne s'en ſert que dans les cas de néceſſité; mais il eſt facile auſſi de ſe convaincre par le calcul, que même pour de pareils cas, la ſuppoſition que nous venons de faire ne ſauroit affecter ſenſiblement le dernier réſultat. Poſant donc

$$y = 59° 59' 27'' \;\&\; \text{coſ.}\,y = 0,5001343,$$

j'introduis un nouvel angle ω tel, que

$$\text{coſ.}\,\omega = 0,5001343.\,\frac{\text{coſ.}\,[H\,v\,☾]}{\text{coſ.}\,[H\,a\,☾]}\,,$$

pour avoir l'Équation

$$\text{ſin.}\tfrac{X+H}{2}.\text{ſin.}\tfrac{X-H}{2} = 2.\text{coſ.}\,\omega.\text{ſin.}\tfrac{d+t}{2}.\text{ſin.}\tfrac{d-t}{2}$$

qui étant developpée (*) donne

$$\text{ſin.}(\tfrac{1}{2}X)^2 = \text{ſin.}(\tfrac{1}{2}H)^2 + 2\,\text{coſ.}\,\omega[\text{ſin.}(\tfrac{1}{2}d)^2 - \text{ſin.}(\tfrac{1}{2}t)^2]$$

$$= \text{ſin.}(\tfrac{1}{2}H)^2 - \tfrac{1}{2}\text{coſ.}(d+\omega) - \tfrac{1}{2}\text{coſ.}(d-\omega)$$

$$+ \tfrac{1}{2}\text{coſ.}(t+\omega) + \tfrac{1}{2}\text{coſ.}(t-\omega)$$

ou bien

$$\text{ſin. vers.}\,X = \text{ſin. vers.}\,H + \text{ſin. vers}(d+\omega) + \text{ſin. vers}(d-\omega)$$

$$- \text{ſin. vers}(t+\omega) - \text{ſin. vers}(t-\omega)$$

ainſi qu'il a été dit dans la ſolution du Problême.

Précis des Tables qu'il faut fournir au Navigateur pour l'emploi de cette méthode.

4.) Sous ce titre il n'eſt queſtion d'aucune table qui néceſſaire dans l'emploi de cette méthode l'eſt également auſſi dans d'autres opérations du calcul nautique, par exemple, pour réduire les hauteurs obſervées des bords des aſtres en hauteurs vraies de leurs centres; telles ſont les tables des diametres des aſtres, de la réfraction en différentes hauteurs, de la parallaxe de hauteur du Soleil, & de celle de la Lune en raiſon de ſa parallaxe horizontale, & d'autres (*); il ne s'agit ici

(*) Les théorémes trigonométriques dont on a beſoin dans cette transformation, ſont les ſuivans:

$$\text{ſin.}(a+b).\text{ſin.}(a-b) = \text{ſin.}\,a^2 - \text{ſin.}\,b^2$$

$$2.\text{coſ.}\,a.\text{coſ.}\,b = \text{coſ.}(a-b) + \text{coſ.}(a+b)$$

$$2.\text{ſin.}\,a^2 = 1 - \text{coſ.}\,2a$$

$$2.\text{ſin.}(\tfrac{1}{2}a)^2 = 1 - \text{coſ.}\,a = \text{ſin. vers.}\,a.$$

(**) Toutes ces tables ſe trouvent dans le livre: *Tables requiſite to be uſed with the Nautical Ephemeris for finding the latitude and longitude at ſea, publiſhed by order of the commiſſioners of Longitude.*

ici que de celles qui ſont particulieres à ma méthode, & il n'y en a que deux:

1) *La Table des Sinus verſes.* Elle ſe trouve de minute en minute & juſqu'à 90 degrés dans le récueil des tables mathématiques de Sherwin; il faudroit donner à cette table une plus grande étendue, en allant de 10 en 10 ſecondes & au moins iusqu'à a 180 degrés. Comme les tables de Callet donnent dans une ſemblable étendue, les ſinus & les coſinus des angles jusqu'à 90 degrés; la conſtruction d'une pareille table des ſinus verſes n'a plus aucune difficulté, puisqu'on a généralement

$$\text{ſin. vers } a = 1 - \text{coſ. } a \;\&$$

$$\text{ſin. vers } (90 + a)^\circ = 1 + \text{ſin. } a$$

ou bien auſſi

$$\text{ſin. vers } (90 + a)^\circ = 2 - \text{ſin. vers } (90 - a)^\circ$$

cette table étant conſtruite jusqu'à 180°, on aura auſſi les ſinus verſes de tous les angles plus grands que 180°, puisque

$$\text{ſin. vers } (180 + a)^\circ = \text{ſin. vers } (180 - a)^\circ.$$

2) *La Table des angles ω pour chaque hauteur apparente du centre de la Lune & pour chaque valeur de ſa parallaxe horiſontale.* Il ſemble d'abord que la conſtruction de cette table ne pourroit manquer d'être aſſes penible; mais il ſuffit d'en faire un petit eſſai, pour ſe convaincre qu'elle eſt également facile & expeditive, parceque la plus grande variation de l'angle ω ne va qu'à un petit nombre de minutes, de façon qu'on pourroit facilement & en peu de tems donner à cette table une

 éten-

Digitized by Google

étendue qui diſpenſeroit le Navigateur de tout embarras de la double entrée & de la double interpolation. Pour rendre cela plus clair, je me contente d'expoſer ici les valeurs de cet angle en degrés & minutes, calculées pour la parallaxe horizontale moyenne de la ☾ = 57′ 30″ & de 10 en 10 degrés de hauteur apparente de ſon centre :

H *a* ☾	ω	H *a* ☾	ω
10°	60° 5′	50°	60° 24′
20°	60° 10′	60°	60° 28′
30°	60° 16′	70°	60° 30′
40°	60° 20′	80°	60° 31°

Type du Calcul

5.) *Obſervation* : on a trouvé par l'obſervation, la diſtance apparente du centre de la Lune à une Etoile fixe = 51° 28′ 35″ ; la hauteur apparente du centre de la Lune = 12° 30′ 0″, & celle de l'Etoile = 24° 48′ 0″ ; la Parallaxe horizontale de la Lune étant alors = 56′ 15″. On demande la diſtance vraie de leurs centres.

I) Formation des 5 Argumens :

Haut. app. des Centr.	Ref. & Par.	Haut. vraies des Centr.	La Table des ω donne pour ce cas	
☾ = 12° 30′ 0″ ✳ = 24° 48′ 0″	+ 50′ 42″. − 2′ 3″.	☾ = 13° 20′ 42″ ✳ = 24° 45′ 57″	ω = 60° 6′ 10″ Or *d* = 51° 28′ 35″	ω = 60° 6′ 10″ *t* = 12° 18′ 0″
Diff. = 12° 18′ 0″ = *t*		Diff. = 11° 25′ 15″ = H Arg. I	Som. = 111° 34′ 45″ Arg. II Diff. = 8° 37′ 35″ Arg. III	Som. = 72° 24′ 10″ Arg. I Diff. = 47° 48′ 10″ Arg.

II)

II) Calcul de la diſtance vraie

La Table des ſinus verſes donne

pour	les nombr.	pour	les nombr.
l'Arg. I	198008.	l'Arg. IV	6976763.
- - - II	13677865.	- - - V	3283153.
- - - III	113126.	Somme	10259916.
Somme	13988999.		13988999.
La Différ. de ces deux Som. eſt			3729083.

Ce nombre 3729083 répond dans la même Table à l'angle 51° 9′ 51″ qui donc eſt la diſtance vraie cherchée du centre de la Lune à l'Etoile.

Le réſultat de ce calcul ne différe en rien de celui qu'on trouue par l'application immediate des regles de la Trigonométrie ſphérique.

Avantages de cette Méthode

6.) Qu'il me ſoit permis de donner ici un petit apperçu des avantages qu'il me ſemble rencontrer dans l'emploi de ma méthode :

1) Elle eſt *rigoureuſe*. Tirée des principes exacts de la Trigonométrie, elle n'admet aucune poſition qui ne ſoit rigoureuſement vraie. On m'objectera peut-être la variabilité, quoique tres-petite, de l'angle y, que j'ai pris pour une quantité conſtante; mais il eſt viſible, que l'eſprit de la méthode ne dépend en aucune maniére de cette ſuppoſition, parceque quelle grande même que feroit la variabilité de cet angle, il y auroit cependant toujours un angle ω tel que

$$\text{coſ.}\,\omega = \text{coſ.}\,y \,.\, \text{coſ.}\,z.$$

Or il arrive avantageuſement, que cet angle eſt réellement conſtant, desque la hauteur du Soleil ou de l'Etoile ſurpaſſe 10 degrés & que ſa variabilité totale

entre 1 & 10 degrés de hauteur de l'Aſtre ne va qu'à environ 18 ſecondes. Rien n'empeche de profiter de cette circonſtance pour faciliter la conſtruction de la table des angles ω; & pour éloigner dans le dernier cas, où d'ailleurs les obſervations mêmes ſont tres-incertaines, tout ſoupçon d'une erreur ſenſible qui pourroit réſulter de cette ſuppoſition ſur la détermination de la diſtance vraie des Aſtres, on pourroit facilement conſtruire une autre table des ω, applicable aux cas où la hauteur du Soleil ou de l'Etoile ſeroit moindre que 10 degrés.

2) Cette méthode eſt *ſure*, c'eſt à dire, elle écarte plus qu'aucune autre, tout ce qui pourroit occaſionner une mépriſe de la part du calculateur. On n'y rencontre aucune diſtinction des cas, aucune quantité tantôt poſitive, tantôt négative, les ſinus verſes des angles ſont conſtamment poſitifs; la marche du calcul eſt toujours la même, de façon qu'on pourroit fournir au Navigateur des Types imprimés du calcul, dans lesquel il n'auroit qu'à inſerer les nombres tirés immediatement de l'obſervation & des tables.

3) Cette méthode peut, ſans doute, être cenſée ne pas exceder *la portée du moins de la plupart des Aſtronomes marins*. Elle ne ſuppoſe au Navigateur aucune connoiſſance des Logarithmes, ni des lignes trigonométriques, ni même des fractions decimales; il peut même ignorer qu'eſt ce que c'eſt qu'un ſinus verſe; ce n'eſt pas abſolument de même dans les méthodes où il entre des ſinus ou des coſinus, on ne pourroit point s'en ſervir ſans connoitre les ſens de ces lignes, lorsqu'elles deviennent négatives, ce qui n'arrive jamais aux ſinus

nus verſes des angles. Enfin tout le calcul ſe fait par les opérations les plus élémentaires de l'Arithmétique.

7.) Je ne dois cependant pas paſſer ſous ſilence un équivoque qui, dans un certain cas, pourroit ſe préſenter dans l'emploi de cette méthode, quoique l'on verra facilement qu'il ne tient qu'au calculateur des Ephémérides nautiques, de l'éloigner abſolument. Le ſinus verſe de l'angle $(180-a)^\circ$ eſt auſſi celui de $(180+a)^\circ$ ou ce qui revient au même, le ſinus verſe de l'angle $(360-a)^\circ$ eſt auſſi celui de l'angle de a°. Or par l'effet combiné de la réfraction & de la parallaxe, la diſtance vraie de deux aſtres eſt en certains cas plus grande, en d'autres moindre, que leur diſtance apparente. Si donc la diſtance apparente approche tres-près de 180°, ou ſi elle les ſurpaſſe tres-peu; il peut arriver que la diſtance vraie qui répond à cette diſtance apparente, ſoit dans le premier cas, plus grande que 180°, & dans le ſecond, moindre que 180°, & le Navigateur ne trouve dans la méthode aucune indication, ſi le ſinus verſe de la diſtance vraie qu'il vient de trouver, appartient au plus petit ou au plus grand de ces deux angles. Or il eſt viſible, que le Navigateur eſt à l'abri de cet équivoque & de la mépriſe qu'il pourroit occaſionner, ſi dans les Ephémérides nautiques on n'indique pour être comparées à la Lune, que de telles Etoiles dont la diſtance vraie à la Lune n'approche pas alors à un degré prés de 180°.

8) Je termine ce Mémoire par l'expoſé de deux autres transformations dont eſt ſusceptible la regle tirée immediatement des principes de la Trigonométrie ſphérique.

L'Équation fondamentale

$$\text{ſin.}\,\frac{X+H}{2}\,.\,\text{ſin.}\,\frac{X-H}{2} = 2\,.\,\text{coſ.}\,z\,.\,\text{coſ.}\,y\,.\,\text{ſin.}\,\frac{d+t}{2}\,.\,\text{ſin.}\,\frac{d-t}{2}$$

ſe

ſe réduit à celle cy;

$$4.\text{ſin.}\tfrac{X+H}{2}.\text{ſin.}\tfrac{X-H}{2}=\left\{\begin{array}{l}+\text{coſ.}(t+u)-\text{coſ.}(d+u)\\+\text{coſ.}(t-u)-\text{coſ.}(d-u)\\+\text{coſ.}(t+v)-\text{coſ.}(d+v)\\+\text{coſ.}(t-v)-\text{coſ.}(d-v)\end{array}\right\}$$

en faiſant, pour abréger, $z-y=u$ & $z+y=v$.

Or comme les ſignes dont ces coſinus ſont affectés, changent desque leurs angles ſurpaſſent 90°; pour les en rendre independants, cette Équation ſe peut mettre ſous la forme ſuivante:

$$2\,\text{ſin.}\tfrac{X+H}{2}.\text{ſin.}\tfrac{X-H}{2}=\left\{\begin{array}{l}-(\text{ſin.}\tfrac{t+u}{2})^2+(\text{ſin.}\tfrac{d+u}{2})^2\\-(\text{ſin.}\tfrac{t-u}{2})^2+(\text{ſin.}\tfrac{d-u}{2})^2\\-(\text{ſin.}\tfrac{t+v}{2})^2+(\text{ſin.}\tfrac{d+v}{2})^2\\-(\text{ſin.}\tfrac{t-v}{2})^2+(\text{ſin.}\tfrac{d-v}{2})^2\end{array}\right\}$$

ou bien, pour que tous les termes deviennent additifs, ſous celle cy:

$$4+2.(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}X)^2=\left\{\begin{array}{l}+2.(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}H)^2\\+(\text{ſin.}\tfrac{d+u}{2})^2+(\text{coſ.}\tfrac{t+u}{2})^2\\+(\text{ſin.}\tfrac{d-u}{2})^2+(\text{coſ.}\tfrac{t-u}{2})^2\\+(\text{ſin.}\tfrac{d+v}{2})^2+(\text{coſ.}\tfrac{t+v}{2})^2\\+(\text{ſin.}\tfrac{d-v}{2})^2+(\text{coſ.}\tfrac{t-v}{2})^2\end{array}\right\}.$$

Il faudroit donc, pour l'emploi de cette méthode, fournir au Navigateur des tables qui donnent les angles z & y, & encore des tables des quarrés des ſinus & des coſinus. Pour le diſpenſer de la derniére, on pourroit introduire un nouvel argument en faiſant $180°+t=T$, moyennant quoi on obtient

pour

pour le quarré du ſinus de la moitié de la diſtance vraie cherchée l'Équation ſuivante :

$$4+2(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}X)^2=\left\{\begin{array}{l}2.(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}H)^2+(\text{ſin.}\tfrac{T+u}{2})^2\\+(\text{ſin.}\tfrac{d+u}{2})^2+(\text{ſin.}\tfrac{T-u}{2})^2\\+(\text{ſin.}\tfrac{d-u}{2})^2+(\text{ſin.}\tfrac{T+v}{2})^2\\+(\text{ſin.}\tfrac{d+v}{2})^2+(\text{ſin.}\tfrac{T-v}{2})^2\\+(\text{ſin.}\tfrac{d-v}{2})^2\end{array}\right\}.$$

Par des procédés ſemblâbles on peut mettre auſſi la ſeconde Équation fondamentale

$$\text{ſin.}\tfrac{X+H}{2}.\text{ſin.}\tfrac{X-H}{2}=2.\text{coſ.}\omega.\text{ſin.}\tfrac{d+t}{2}.\text{ſin.}\tfrac{d-t}{2}$$

ſous la forme ſuivante :

$$2+(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}X)^2=(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}H)^2+(\text{ſin.}\tfrac{d+\omega}{2})^2+(\text{ſin.}\tfrac{d-\omega}{2})^2+(\text{ſin.}\tfrac{T+\omega}{2})^2+(\text{ſin.}\tfrac{T-\omega}{2})^2.$$

L'une & l'autre de ces deux méthodes, offrent les mêmes avantages que nous avons reconnus à celle où il n'entre que des ſinus verſes; à l'exception de ce qu'elles demandent quelques opérations arithmétiques de plus; c'eſt par cette raiſon que la méthode des ſinus verſes que je viens de propoſer, me paroit mériter la préférence ſur l'une & l'autre.

Digitized by Google

OBSERVATIO
ECLIPSIS SOLARIS
DIE $\frac{23 \text{ Mart.}}{3 \text{ April.}}$ 1791 PETROPOLI IN SPECVLA ASTRONOMICA, TELESCOPIO SCHORTII $2\frac{1}{2}$ PEDVM, FACTA

a

P. INOCHODZOW.

Conuent. exhib. die 18 *Maii*, 1791.

Pro obſeruanda inſtanti eclipſi Solis inquiſiui in ſtatum penduli per altitudines Solis correſpondentes, diebus 19, 23 ac 24 Martii, quadrante Siſſoniano bipedali captas, motumque ipſius aequabilem reperi, et exinde reductionem momentorum obſeruatorum ad tempus verum iuſto modo applicui. Variae hoc die conſpiciebantur in diſco Solis maculae, quarum poſitionem rectam tempore obſeruationis delineaui et in adpoſita figura exhibui.

Appropinquante initio eclipſeos oculum a tubo non remouens, partemque limbi ſolaris, vbi deliquium incipere debebat, in medio tubi retinens animaduerti primum contactus limborum Solis ac Lunae momentum trans nubes tenues hora pomerediana 2, 56′, 30″ temp. veri, ita vt verum initium vix vno, aut ad ſummum duobus ſcrupulis ſecundis citius, quam hic

hic aſſignatum, contingere potuiſſe arbitror. Margo diſci lunaris in ſolem iam ingreſſi aliquantum aſper mihi videbatur. Breui poſthac nubes denſae ſolem tegunt et obſeruationem continuare obſtant; deinde circa medium eclipſis per nubes rariores et ſub finem coelo fauente ſequentes obſeruationes inſtituere licuit.

Macula *c* Luna tegitur - -	3^h.	$55'$.	$48''$	T. V.
Tota deliteſcit - - - -	3.	55.	58.	
Macula *d* incipit mergi - -	4.	1.	34.	
Tota immerſa - - - -	4.	2.	47.	

Porro quadrantis ope appulſus limborum Solis et Lunae atque cornuum ad fila micrometrica horizontale ac verticale ſequentem in modum a me notati.

Oſeruatio I, tubo in altitudine 19°. 17′.

Limbus Solis inferior ad fil. horiz. -	4^h.	$7'$.	$17''$	T. V.
Cornu apparenter ſuperius ad fil. vertic.		7.	37.	
Limbus Lunae ad fil. horiz. - -		8.	11.	
Cornu ſuperius ad fil. horiz. - -		8.	22.	
—— inferius ad fil. vert. - -		8.	48.	
Limbus Lunae ad fil. vert. - -		9.	9.	
Limbus Solis ſequens ad fil. vert. -	4.	9.	52.	

Obſeruatio II, tubo in altitudine 18°. 17′.

Limbus Solis inferior ad fil. horiz. -	4.	11.	32.
Cornu ſuperius ad fil. vert. - -		11.	42.
Limbus Lunae ad fil. horiz. - -		12.	39.
Cornu ſuperius ad fil. horiz. - -		13.	4.
—— inferius ad fil. vert. - -		13.	22.
Limbus Solis ſequens ad fil. vert. -	4.	14.	2.

Obſeruatio III, tubo in altitudine 15°. 37′.

Limbus Solis inferior ad fil. horiz.	-	4^h.	30′.	6″	T. V.
Idem ad fil. vertic.	- - - -		30.	22.	
Cornu praecedens ad fil. vert.	- -		30.	29.	
Limbus Lunae ad fil. horiz.	- -		31.	56.	
Cornu ſequens ad fil. vert.	- -		32.	40.	
Limbus Solis ſequens ad fil. vert.	-	4.	32.	53.	

His tribus obſeruationibus appulſuum, partim ob nubeculas, partim ob craſſitiem filorum, vix certitudinem vnius temporis ſecundi ineſſe fateor.

Mox nubes denſiores praeterfugiunt, quibus diſperſis emerſiones macularum et finem eclipſis dicto teleſcopio obſervavi.

Macula *e* apparet	- - -	5^h.	3′.	57″	T. V.
—— *c* prodit	- - - -		5.	44.	
—— *f* euadit	- - - -		7.	34.	
—— *d* emergit	- - - -		12.	14.	
—— tota emerſa	- - - -		13.	7.	dub.
Finis eclipſis certus	- - -	5.	21.	26.	
Hinc duratio totius eclipſis	- -	2.	24.	56.	
Et medium ex initio et fine	- -	4.	8.	58.	

Obſeruatio haec initium eclipſis ſesquiminuto primo citius, et finem duobus minutis primis cum 26 ſecundis tardius exhibuit, adeoque duratio et quantitas obſcurationis paulo maior fuit, ac calculus ephemeridum promiſit.

Fe-

Digitized by Google

Feliciores nos fuimus circa hanc Luminarium coniunctionem, quam circa proximam eorundem oppoſitionem;

Cornua cum Lunae pleno ſemel orbe coiſſent.

Nam expectatum die $\frac{7}{18}$ Aprilis deliquium Lunae, cuius finis videri hic loci potuiſſet, nubila coeli facies obſeruare impediuit; votique nos impotes fecit laboranti ſuccurrere Phoebae; - - - - - - - - at -

Ipſa dies alios alio dedit ordine Luna

Felices operum. Vate Virgilio canente.

Schema macularum in Sole tempore eclipſeos conſpectarum videatur Tab. XIII.

DE
ECLIPSI SOLIS
ANNO 1791 DIE $\frac{23 \text{ Mart}}{3 \text{ Apr.}}$ PETROPOLI OBSERVATA.

Auctore
STEPHANO RVMOVSKI.

Conuent. exhib. die 1 Decembr. 1791.

Praeter obſeruationem Petropoli habitam reuocaui ad calculum obſeruationes huius eclipſis Pariſiis et Palermae inſtitutas: nullae enim aliae praeter has ad manus meas peruenerunt.

	Initium.	Finis.
Pariſiis	$0^b\ 33'.42''$ *t. v.*	$3^b\ 17'.37'', 3$ *t. v.*
Palermae	2. 7. 0.	3. 56. 5.
Petropoli	2. 56. 27.	5. 21. 27.

Elementa ex Tabulis aſtronomicis Londini Anno 1770 editis Eclipſin hanc ſpectantia.

Tempore medio Grenouicenſi -	$2^b\ 10'\ 56''$.
Longitudo ☉lis media - -	$11^\circ\ 50'.29''$
Longitudo ☉lis vera - -	13. 45. 40
Motus horarius ☉lis - - -	2. 27, 5
$\frac{1}{2}$ Diameter ☉lis - - -	16. 1, 8
Longitudo ☽ vera - -	14. 25. 22, 6

La-

Latitudo ☽ Bor. - - -	40'.57'',8
Parall. ☽ aequatorea - - -	54. 49, 9
½ Diameter ☽ - - - -	14. 55, 1
Motus horarius ☽ in Longit. - -	30. 13, 9
- - - - - - in Latit. - - —	2. 47, 0
Parall. ☽ — parall. ⊙ - -	54. 36, 4.

Aſſumta ratione diametri aequatoris ad axem telluris 230 : 229 computaui pro qualibet obſeruatione reliqua elementa Eclipſim ſpectantia, cuiusmodi ſunt Longitudo et Latitudo Lunae, parallaxis eiusdem in Longitudinem et in Latitudinem, nec non diameter Lunae apparens, ac obtinui

	Longit. ☽	Latit. ☽	Parall. Long.	Parall. Latit.	Diam. ☽ app.
Pariſiis pro initio	13°.33'.20,1	45'.45'',2	1181, 8	1930,5	905, 4
pro fine	14. 55. 55,	38. 9, 1	2395, 7	1481,3	902, 5
Palerm. pro initio	13. 58. 6,1	43. 27, 2	1963, 0	1106,7	905, 6
pro fine	14. 53. 3,8	38. 24, 9	2762, 6	855,7	902, 0
Petrop. pro initio	13. 48. 40,8	44. 19, 6	2116, 2	2034,2	901, 5
pro fine	15. 1. 54,4	37. 36, 0	2571, 6	1931,6	897, 8

Vnde denotante δ correctione ſummae ſemidiametrorum Solis et Lunae, y Latitudinis Lunae, et π Parallaxis aequatoreae pro tempore coniunctionis ſequentes orientur expreſſiones.

Pariſiis ex initio $0^h.52'.\ 2''$ $+ 2{,}39\,\delta - 1{,}04\,y - 0.005\,\pi$

ex fine 0. 50. 47 $- 2{,}39\,\delta + 1{,}03\,y - 2.039\,\pi$

Hinc. I. 75 $+ 4{,}78\,\delta - 2{,}07\,y + 1.\ 96\,\pi = 0$

Palerm. ex initio 1. 36. 20, 5 $+ 3{,}62\,\delta - 2{,}91\,y - 0.\ 31\,\pi$

ex fine 1. 34. 25 $- 3{,}43\,\delta + 2{,}66\,y - 2.\ 70\,\pi$

II. 115 $+ 7{,}05\,\delta - 5{,}57\,y + 1.\ 19\,\pi = 0$

Pe-

Petrop. ex initio	$2^h.43'.27''$.	$+ 2.29\,\delta - 0.76\,y - 0.\ 17\,\pi$	
ex fine	2. 43. 5.	$- 2.19\,\delta + 0.38\,y - 1.\ 51\,\pi$	
III.	22.	$+ 4.48\,\delta - 1.14\,y + 1.\ 34\,\pi = 0$	

Conferenti aequationes finales facile patebit eas ita eſſe comparatas, vt nulli valores idonei pro δ, y et π aſſignari queant, qui ſatisfaciant ſaltem proxime omnibus tribus aequationibus. Ex variis aſtronomorum diſquiſitionibus conſtat valorem ipſius δ contineri intra limites -4 et -5 et ipſius π intra -1. et -3. Verum cum in aequationibus finalibus coefficientes ipſius π ſint ſatis exigui, ſtatuere licebit $\pi = 0$, atque ſi ponatur $\delta = -4$, aequatio I. dabit $y = 27''$, aequatio II. $y = 15''\frac{1}{2}$ et III. $y = 4''$; quodſi ponatur $\delta = -5$ ex aequatione I. fit $y = 24''$, ex aequatione II. $y = 14$ et ex aequatione III. $y = -0'',3$. Similis diſcrepantia prodit, ſi ipſi π tribuatur aliquis valor intra limites -1 et -3 contentus. Vnde concludere licet aequationes prolatas non ſufficere ad definiendam correctionem Latitudinis Lunae, et in obſeruationes vel initii vel finis errores quosdam irrepſiſſe. De fine ſaltem a me obſeruato non aeque certus ſum ac de initio; obſeruatus enim ille eſt Sole tenui nube inquinato et 10 circiter gradus ſupra horizontem eleuato; vnde facile contingere potuit, vt in momento hoc error aliquot minutorum ſecundorum fuerit commiſſus.

Poſt initium Eclipſis ad medium vsque Sol vt plurimum etſi tenuibus, diſtincte tamen limbum illius conſpiciendi praepedientibus tegebatur nubibus; circa medium vero coelo ſereno micrometro obiectiuo tubo Dollondiano tripedali adaptato ſuper partes lucidas ſequentes mihi obſeruationes inſtituere licuit.

I.

	Pars lucid.
I. 4^h 3′. 12″. t. v	9′. 38″, 9
II. 4. 8. 12	9. 30, 4
III. 4 12. 18	9. 26, 0

Vt hinc de Latitudine Lunae iudicium aliquod ferri queat, computatis pro his momentis Parallaxibus Lunae et Diametro apparrente obtinui

	Pars lucid.	Latit. ☽	Parall. Lat.	Diam. ☽	Diſt. Centr.
I. 4^b. 3′.12″.	9 .38″,9	41′.13″,8	32′.36″,2	899, 9	8′.37″.
II. 4 8. 12	9. 30, 4	40. 59, 8	32. 32, 3	899, 7	8. 28. 3
III. 4. 12 18	9. 26, 0	40. 50, 4	32. 29, 3	899, 6	8. 23. 8

Pro reducenda diſtantia centrorum obſeruata ad minimam, datis pro initio ac fine Eclipſis Parallaxibus Lunae Longitudinis et Latitudinis, nec non Diametro illius apparente computaui primum momentum medii tranſitus apparentis, ac reperi illud incidiſſe in 4^b. 9′. 1″ *t. v.* pro quo reperitur Latitudo Lunae 40′. 57″,7 et Parallaxis in Latitudinem 32′. 32″,2; hinc Latitudo apparens fit 8′. 25″, 5 = 505″, 5. Dein dato motu horario Lunae in orbita apparente et diſtantia centrorum ex obſeruatione deſumta facile deducitur pro qualibet obſeruatione minima centrorum diſtantia. Calculo peracto prodiit

	Pars lucida	Diſtant. Centr.	Diſtant. min.
I. 4^b. 3′.12″	9′.38″,9	8′.37″,0	8′.16″,5
II. 4. 8. 12.	9. 30, 4	8. 28, 3	8. 18, 0
III. 4. 12. 18.	9. 26, 0	8. 23, 8	8. 17, 1
		Medium	8. 17, 2 = 497″, 2

Diſtantia minima centrorum 497″, 2 ducta in coſinum inclinationis orbitae apparentis dat Latitudinem Lunae apparentem pro momento medii tranſitus 495″, 4: vnde correctio Latitudinis Lunae ſequitur + 10″ circiter. Aſt cum obſeruationes initii ac finis Pariſiis et Palermae inſtitutae determinationi huic minime ſuffragentur, de vera correctione Latitudinis iudicium erit ſuſpendendum, donec aliae obſeruationes ſuper hac Eclipſi habitae hanc vel confirment vel infringant.

Vt vero ſine praevia cognitione correctionis Latitudinis Lunae de momento coniunctionis atque de errore Tabularum in Longitudinem aliquid ſtatuere liceat, ſumatur medium expreſſionum pro momentis coniunctionum ſupra inuentarum, et prodibit ex obſeruatione habita

Pariſiis	$0^h.51'.24'',5 - 1.02\,\pi$
Palermae	$1.35.22,5 + 0.09\,\delta - 0.12\,y - 1.50\,\pi$
Petropoli	$2.43.16. + 0.05\,\delta - 0.19\,y - 0.88\,\pi$

vbi commode euenit, vt momentum coniunctionis ex obſeruatione Pariſina reſultans prorſus liberum euadat a correctionibus δ et y, momenta vero ex obſeruationibus Palermae et Petropoli habitis deducta non niſi a correctione Parallaxis Lunae aequatoreae ſenſibilem mutationem ſint ſubitura. Non ſolum igitur error Tabularum in Longitudinem, verum etiam differentia meridianorum horum locorum ſat tuto hinc concludi poſſe videtur, dum modo ipſae obſeruationes grauioribus non ſint affectae erroribus. Poſito itaque $\pi = -3$ pro differentia meridianorum ſequentes orientur determinationes

Pa-

	Momentum Coniunct.	Differ. merid.
Pariſiis	$0^h\ 51'.27''$.	
Palermae	1. 35. 27.	44'. 0''. Or.
Petropoli	2. 43. 19.	1^h 51. 52.

Denique cum Longitudo Lutetiae Pariſiorum a Grenouico ſit 9' 20'', fiet momentum coniunctionis ad meridianam Grenouicenſem reductum - - $0^h\ 42'\ 7''$ t. v
pro quo Longitudo ☉lis vera ſiue ab aequinoctio vero computata reperitur - - - $0^s\ 13°.42'.\ 9'',8$
et Longitudo ☽ vera - - 0. 13. 42. 17. 1
Conſequitur hinc Tabulas Lunares Londini anno 1770 editas peccare in exceſſu 7 minutis ſecundis.

Digitized by Google

ECLIPSIS
LVNAE PARTIALIS
DIE 30/11 Sept./Oct. 1791, PETROPOLI IN SPECVLA ACADEMICA, TVBO DOLLONDIANO TRIPEDALI, OBSERVATA

a

P. INOCHODZOW.

Conuent. exhib. die 8 Decemb. 1791.

Deliquium Lunae obſeruaturus motum penduli Aſtronomici, ob tempeſtatem hoc anni tempore hic loci plerumque nubilam, non niſi diebus 23/4 Sept./Oct. et 1/12 Octob. per altitudines Solis correſpondentes explorare licuit; illum tam ex his quam ex tranſitibus Solis per meridianum diebus 28 et 29 Sept. obſeruatis ſatis vniformem reperi, nullumque ſupereſt dubium de reductione momentorum obſeruatorum ad tempus verum.

Penumbra ingreditur - -	13^h.	$55'$.	$30''$	T. V.
Eadem increbeſcit - - -	13.	57.	30.	
Initium eclipſis dubium - -	14.	1.	20.	
Idem certum - - - - -	14.	1.	50.	
Ariſtarchus tangit vmbram - -	14.	6.	51.	
—— —— totus in vmbra - -	14.	9.	35.	
Grimaldus ingreditur vmbram -	14.	14.	5.	

Gri-

Grimaldus totus ingreſſus - -	14^{h}. $17'$. $35''$	T. V.
Keplerus vmbra tegitur - - -	14. 19. 10.	
Plato - - - - -	14. 22. 42.	
Copernicus immergitur - - -	14. 24. 57.	
—— —— totus immerſus - -	14. 27. 16.	
Mare humorum tangit vmbram -	14. 35. 5.	
Manilius totus in vmbra - -	14. 40. 21.	
Menelaus - - - -	14. 45. 35.	
Plinius - - - - -	14. 49. 27.	
Mare criſium tangit vmbram -	15. 1. 56.	
Promontorium acutum - -	15. 4. 51.	
Mare criſium totum in vmbra -	15. 9. 50.	
Langrenus totus immerſus - -	15. 26. 10.	

Hucusque tempeſtas obſeruationi admodum fauebat et coelum erat ſerenum, ſed mox poſt medium eclipſeos Luna denſis nubibus a plaga occidentali progredientibus penitus obuoluta, emerſiones macularum et finem eclipſis obſeruare non potui.

Vmbra accedebat ad colorem cinericium, diluta et non ſat bene terminata, hinc momenta immerſionum magis diuinanda ſeu aeſtimanda quam exacte determinanda erant.

EXTRAIT
DES OBSERVATIONS
MÉTÉOROLOGIQUES
FAITES À ST. PÉTERSBOURG
EN L'ANNÉE MDCCLXXXIX.
Suivant le nouveau Stile.

Préſenté à l'Académie le 7 Janv. 1790.

I. Baromètre.

1.) Les hauteurs extrêmes, la variation, le milieu & la hauteur moyenne pour chaque mois de l'année.

Mois.	Au plus haut			Au plus bas			Variat.	Milieu	Hauteur moyenne
	P. cent.	jour,	heure	P. cent.	jour,	heure	cent.	P. cent.	P. mill.
Janvier	29.05	5.	12. s.	27.36	9.	9. m.	169	28.20	28.124
Février	28.61	23.	12. m.	27.01	16.	2. m.	160	27.81	28.068
Mars	28.87	3.	12. m.	27.81	19.	5. s.	106	28.34	28.376
Avril	28.79	8.	6. s.	27.75	1.	3. s.	104	28.27	28.166
Mai	28.63	9.	12. m.	28.03	12. 13.	6. m.	60	28.33	28.313
Juin	28.47	14.	12. m.	27.79	7.	9. s.	68	28.13	28.148
Juillet	28.37	4. 8.	2. s. 11. m.	27.97	11.	7. m.	40	28.17	28.212
Août	28.52	30.	8. m.	27.98	7. 8.	12. m. 4. m.	54	28.25	28.286
Septembr.	28.52	17.	10. m.	27.78	10.	6. m.	74	28.15	28.146
Octobre	28.74	25.	10. m.	27.97	30.	9. s.	77	28.15	28.476
Novembr.	28.59	20.	6. s.	27.21	28.	1. m.	138	27.90	28.104
Décembr.	28.73	3.	2. m.	27.21	23.	2. s.	152	27.95	28.018

m. ſignifie *matin* ou *avant-midi*, & s. *ſoir* ou *après-midi*.

2.) Nom-

2.) Nombre des jours, auxquels la hauteur du Baromètre a ſurpaſſé quelques points principaux de l'échelle, avec la hauteur qui répond à chaque demi-mois.

Mois.	Au deſſus de 27. 80 jours h.	27. 90 jours h.	28. 00 jours h.	28. 10 jours h.	28. 20 jours h.	Baromètre, un demi-mois au deſſus de Pouces. mill.
Janvier.	24. 21	20. 21	16. 12	11. 18	10. 0	28. 021
Février	22. 18	20. 21	16. 15	11. 21	9. 15	28. 051
Mars	31. 0	29. 6	28. 6	26. 15	23. 21	28. 330
Avril	29. 9	27. 3	22. 15	18. 12	10. 15	28. 145
Mai	31. 0	31. 0	31. 0	27. 21	23. 9	28. 305
Juin	29. 15	25. 9	22. 9	19. 3	12. 15	28. 164
Juillet	31. 0	31. 0	30. 6	24. 15	18. 18	28. 220
Août	31. 0	31. 0	29. 21	28. 9	24. 3	28. 276
Sept.	29. 18	28. 21	23. 6	16. 18	10. 18	28. 133
Oct.	31. 0	31. 0	30. 12	29. 21	29. 0	28. 480
Nov.	26. 6	23. 15	22. 0	18. 15	12. 12	28. 159
Déc.	21. 15	18. 12	15. 6	11. 18	8. 21	27. 982

I.) D'où l'on conclud pour l'année 1789.

La plus grande hauteur du Baromètre 29, 05 pouces, le 5 Janvier à 10 h. minuit. Thermomètre de Délisle 186°. Vent du Nord, ciel ſerein.

La plus petite hauteur 27, 01, le 16 Février à 2 h. du matin. Thermomètre 147°. Vent fort du Sud, ciel couvert.

La variation totale 2, 04 & le milieu 28. 03. pouces.

La hauteur moyenne, c'eſt à dire, la ſomme de toutes les hauteurs obſervées, diviſée par leur nombre = 28, 205, ou $28\frac{205}{1000}$ pouces de Paris.

La

La hauteur moyenne a été la plus grande en Octobre & la plus petite en Décembre. En général elle a été cette année-ci extraordinairement grande & de 0, 172 pouce, ou de 2 lignes, plus grande que dans l'année moyenne.

La variation la plus conſidérable a été en Janvier, & la moins conſidérable en Juillet.

Enfin le Baromètre a été:

en 339	jours	6	heures,	au deſſus de	27. 80.
318	——	15	——	au deſſus de	27. 90.
288	——	12	——	au deſſus de	28. 00.
245	——	15	——	au deſſus de	28. 10.
194	——	6	——	au deſſus de	28. 20: enfin
en 182	——	12	——	au deſſus de	28.222 pouces.

II.) Pour l'hyver de 1788 à 1789, depuis le 1 Novembre 1788 jusqu'au 1 Mai 1789, comprenant un intervalle de 181 jours.

La plus grande hauteur du Baromètre 29. 05 le 5 Janvier.
La plus petite hauteur 27. 01 le 16 Février.
La variation totale 2, 04 & le milieu 28. 03.
La hauteur moyenne 28. 182, ou 28 pouces 2, 1 lignes.

Le Baromêtre a été:

en 161	jours	12	heures,	au deſſus de	27. 80.
147	——	6	——	au deſſus de	27. 90.
130	——	3	——	au deſſus de	28. 00.
102	——	18	——	au deſſus de	28. 10 &
79	——	21	——	au deſſus de	28. 20. Enfin
en 90	——	12	——	au deſſus de	28.153. pouces.

III.)

III.) Pour l'été de 1789, depuis le 1. Mai jusqu'au 1. Novembre, comprenant un intervalle de 184 jours:

La plus grande hanteur du Baromètre 28. 74 le 25 Octobre. Thermom. 150. Calme & ciel ſerein: enſuite brouillard & Vent d'Oueſt.

La plus petite hauteur 27. 78 le 10 Septembre. Thermom. 129. Vent d'Eſt fort, pluie & ciel couvert.

La variation totale 0, 96 & le milieu 28. 26.

La hauteur moyenne 28. 265, ou 28 pouces 3, 1 lignes. Cette hauteur moyenne, qui ordinairement pour les mois d'été eſt d'$\frac{1}{4}$ à $\frac{1}{2}$ ligne moindre que pour les mois d'hyver, a ſurpaſſé cet été de 1789 celle de l'hyver précédent, d'1 ligne entiere.

Le Baromètre a été

en 183 jours	6 heures,	au deſſus de 27. 80.	
178 ——	6 ——	au deſſus de 27. 90.	
167 ——	6 ——	au deſſus de 28. 00.	
146 ——	15 ——	au deſſus de 28. 10.	&
118 ——	15 ——	au deſſus de 28. 20.	pouc. enfin
en 92 ——	0 ——	au deſſus de 28.295.	

3.) Variations ſubites & extraordinaires.

Mois.	Temps jour.	Temps heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc.	Baromètr. $\frac{1}{100}$	Différ. $\frac{1}{100}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmoſphère.
Janv.	2.	6. m.	42	27.	77	+103	161	S.	ciel couvert.
	3.	12. s.		28.	80		179	Ou. fort.	ciel ſerein.
	6.	0. m.	48	29.	05	—92	186	NE.	ciel demi-couvert.
	8.	0. m.	33	28.	13	—77	158	Ou. fort.	ciel couvert, enſuite neige
	9.	9. m.	36	27.	36	+55	160	S.	c. demi-couvert.
	10.	9. s.		27.	91		187	SE.	ciel ſerein.
Févr.	14.	12. m.	38	27.	98	—97	157	calme	c. couv. neige.
	16.	2. m.	46	27.	01	+89	147	S. fort.	ciel couvert.
	17.	12. s.		27.	90		167	SE. fort.	c.demi-ſerein, enſuite brouill
	19.	9. m.	32	28.	07	—76	166	SOu.	ciel ſerein, brouillard, c.couv
	20.	5. s.	49	27.	31	+124	155	SOu. ff.	ciel couvert, neige.
	22.	6. s.		28.	55		165	E.	ciel ſerein.
Avril	1.	0. m.	15	28.	28	—53	167	N.	c. couvert, neige copieuſe
	1.	3. s.	30	27.	75	+46	149	E.	ciel couvert.
	2.	9. s.		28.	21		169	SOu.	c. ſerein, enſuite brouillard
	4.	10. s.	44	27.	77	+54	151	E.	c. couv. beaucoup de neige
	6.	6. s.		28.	31		160	SOu.	ciel ſerein.
	7.	6. m.	36	28.	18	+61	155	S.	neige, ciel couvert.
	8.	6. s.		28.	79		158	NE.	c. ſerein.
May.	10.	9. m.	45	28.	62	—59	130	SOu.	c. ſer. enſuite couv. & neige.
	12.	6. m.		28.	03		138	SOu. fort.	ciel demi-couv. enſuite pluie
Oct.	29.	0. m.	45	28.	65	—68	145	SOu.	c. demi-couvert.
	30.	9. s.		27.	97		143	S. fort.	grele, pluie, ciel couvert.
Nov.	15.	6. m.	24	28.	23	—43	146	SE.	ciel couvert.
	16.	6. m.		27.	80		145	SOu.	pluie, ciel couvert.

Mois.	Temps jour	heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc.	$\frac{1}{100}$	Différ. $\frac{1}{100}$	Therm. degrés.	Vent.	Atmoſphère.
Nov.	17.	6. m.	40	27.	65	+73	141	SOu. fort.	c. couvert, pluie.
	18.	10. s.		28.	38		146	E.	c. couvert, pluie.
	20.	6. s.	30	28.	59	—71	148	E.	neige, ciel couvert.
	21.	12. s.		27.	88		153	N. fort.	c. demi-couvert.
	22.	10. s.	44	27.	66	+61	159	N. ff.	neige, c. demi-couv.
	24.	6. s.		28.	27		165	NE. fort.	ciel ſerein.
	26.	6. m.	43	28.	33	—112	176	Ou.	ciel ſerein.
	28.	1. m.	46	27.	21	+89	154	N.	c. couvert, neige copieuſe.
	29.	11. s.		28.	10		172	NOu.	c. demi-couvert.
Déc.	1.	0. m.	48	27.	82	+91	175	N. fort.	c. ſerein.
	3.	0. m.		28.	73		180	calme.	brouillard, c. demi-couvert.
	8.	0. m.	24	28.	40	—40	148	SOu. fort.	c. couvert, pluie.
	9.	0. m.		28.	00		144	NOu.	pluie, c. couvert.
	9.	3. s.	20	28.	13	—36	152	NOu.	ciel ſerein.
	10.	11. m.	22	27.	77	+45	158	NOu.	c. demi-couvert.
	11.	9. m.	17	28.	22	—69	168	N.	c demi-couvert.
	12.	2. m.	9	27.	53	+32	158	N.	neige, c. couvert.
	12.	11. m.	3	27.	85	—24	153	N.	neige, c. demi-couvert.
	12.	2. s.	28	27.	61	+91	152	NOu.	neige, ciel couvert.
	13.	6. s.	19	28.	52	—32	168	N.	ciel ſerein.
	14.	1. s.		28.	20		152	SOu. fort.	neige, c. couvert, pluie.
	22.	9. s.	17	27.	91	—69	150	NOu.	ciel couvert.
	23.	2. s.	29	27.	22	+55	144	SOu. ff.	pluie & ciel couvert.
	24.	–. s.		27.	77		150	Ou. fort.	c. ſerein, enſuite couvert.

Mois.

Mois.	Temps jour.	heure.	Diff. heur.	Baromètr. Pouc.cent.	Diff. cent.	Therm. degrés.	Vent.	Atmoſphère.
Déc.	27.	12. s.	38	28. 13	—54	148	SOu.	c. couvert, enſuite pluie.
	29.	2. s.		27. 59		146	SOu. fort.	ciel couvert.
	30.	5. s.	19	27. 73	+60	152	SE. fort.	neige, c. demi-couvert.
	31.	12. m.		28. 33		152	calme.	brouillard, ciel couvert.

Les déſcentes ſont déſignées par — & les montées par +.
ff. marque un vent très fort.

La montée la plus conſidérable a donc été de 1, 24 pouces, ou de 15 lignes en 49 heures, le 20 — 22 Fevrier: enſuite celle de 1, 03 pouces, ou de 12⅓ lignes en 42 heures, le 2 — 3 Janvier. La descente la plus conſidérable de 1, 12 pouces, ou de 13½ lignes en 43 heures, a été obſervée le 26 — 28 Novembre. Au reſte les mois de Novembre & de Décembre ont été les plus ſujets à des variations ſubites & extraordinaires, ſurtout les variations du 9 — 14 Décembre & entre celles-ci les 4 chutes & montées alternatives du 12 Décembre, ont été fort remarquables.

II. Ther-

II. Thermomètre.

1.) Hauteurs extrêmes, différence, & température moyenne pour chaque mois de l'année 1789.

Mois.	Hauteurs extrêmes. Au plus bas Degré	Hauteurs extrêmes. Au plus bas jour & heure.	Hauteurs extrêmes. Au plus haut Degré	Hauteurs extrêmes. Au plus haut jour & heure.	Différence. Degré	Etat moyen. Froid moyen. Degré.	Etat moyen. Chaleur moyen. Degré.
Janvier	198	le 12 à 10 h. s.	146	le 24 à 2 h. s.	52	172,7	164,1
Févrièr	188	le 1 à 6 h. m.	146	le 20 à 2 h. s.	42	170,8	160,0
Mars	183	le 14 à 6 h. m.	144	le 30 à 2 h. s.	39	170,6	158,9
Avril	172	le 3 à 6 h. m.	126	le 21 à 2 h. s.	46	153,6	140,4
Mai	152	le 5 à 6 h. m.	118	le 26 à 2 h. s.	34	141,0	129,0
Juin	144	le 9 à 6 h. m.	115	le 22 à 2 h. s.	29	130,6	121,8
Juillet	126	le 26 à 6 h. m. le 31 à 6 h. m. & à 10 h. s.	105	le 19 à 2 h. s.	21	123,0	113,0
Août	131	le 16. 19. & 20. à 6 h. m.	112	le 2. 15 & 24 à 2 h. s.	19	127,5	117,7
Sept.	153	le 28 à 6 h. m.	119	le 2 & 3 à 2 h. s.	34	136,2	128,4
Octobr.	153	le 21 à 6 h. m.	125	le 8 à 2 h. s.	28	142,8	135,4
Novem.	176	le 26 à 6 h. m.	135	le 10 à 2 h. s.	41	152,2	147,4
Décem.	184	le 2 à 10 h. s.	142	le 25 à 2 h. s.	42	156,2	151,3

Digitized by Google

2.) Nombre des jours, auxquels le froid & la chaleur on ſurpaſſé quelques diviſions principales du Thermo- mètre de Déliſle.

Mois.	Le froid a été plus grand que							La chaleur a été plus grande q						
	190 jours.	180 jours.	170 jours.	160 jours.	150 jours.	140 jours.	130 jours.	110 jours.	120 jours.	130 jours.	140 jours.	150 jours.	160 jours.	170 jours.
Janv.	3	9	20	22	31	31	31					5	13	19
Févr.		5	15	25	28	28	28					3	14	25
Mars		6	18	26	31	31	31					4	16	30
Avril			1	6	19	30	30			3	16	27	30	30
Mai					2	18	31		1	17	29	31	31	31
Juin						1	16		13	27	30	30	30	30
Juillet							0	7	29	31	31	31	31	31
Août							3		20	31	31	31	31	31
Sept.					1	5	27		2	22	29	30	30	30
Oct.					6	18	31			6	23	31	31	31
Nov.			5	7	11	30	30				4	21	25	30
Déc.		1	3	7	22	31	31					20	26	29
1789.	3	21	62	93	151	223	289	7	65	137	193	264	308	347

3.)

3.) Énumération détaillée des jours de grand froid.

Le froid a été en 3 jours plus grand que 190°, le 11. 12. 14 Janvier. Il a été entre:

180 & 190	le 5. 6. 10. 13. 18. 30 Janvier, le 1. 2. 3. 9. 10 Février, le 2 — 5. 8. 11 Mars, & le 2 Décembre - - - - -	jours 18
170 & 180	le 2. 3. 4. 9. 15 — 17. 19. 28. 29. 31. Janv. le 4. 5. 7. 8. 18. 22. 23. 25. 27. 28 Févr. le 1. 6. 7. 9 — 13. 15. 21 — 23 Mars, le 3 Avril, le 24 — 26. 29. 30 Novembre, & le 1. 3 Décembre - -	41
160 & 170	le 1. 7. Janvier, le 6. 12 — 14. 17. 19 — 21. 24. 26. Février, le 16 — 20. 24. 26. 31. Mars, le 1. 2. 6. 8. 9. Avril, le 23. 28 Novembre, & le 10. 11. 13. 14. Décembre - - - - - -	31

4.) Énumération détaillée des jours de grande chaleur.

La chaleur a été 7 jours plus grande que 110, le 3. 8. 9. 18 — 21. Juillet. Elle a été obſervée entre:

120 & 110	le 26 Mai, le 2. 3. 15. 21 — 30 Juin, le 1. 2. 4 — 7. 10. 12 — 15. 17. 22 — 31 Juillet, le 1 — 5. 11 — 13. 15. 17. 22—31 Août, & le 2. 3. Septembre - -	jours 58
130 & 120	le 20. 21. 27. Avril, le 7. 10. 11. 17. 19 — 25. 27 — 31 Mai, le 1. 4 — 7. 10 — 14. 16. 18 — 20 Juin, le 11. 16 Juillet, le 6 — 10. 14. 16. 18 — 21 Août. le 1. 4 — 16. 18 — 23. Septembre, & le 2. 5 — 8. 11. Octobre - - -	72
140 & 130	le 11 — 15. 18. 19. 22. 25. 26. 28 — 30 Avr. le 1. 4 — 6. 8. 9. 12 — 16. 18 Mai, le 8. 9. 17. Juin, le 17. 24 — 26. 28 — 30 Sept. le 1. 3. 4. 9. 10. 12 — 19. 22 — 24. 31 Octobre, & le 5. 8 — 10 Novembre -	56

Ré-

Digitized by Google

Réſumé général de ces tableaux.

Le plus grand froid, 198 degrés d'après la graduation de Délisle, a été obſervé le 12 Janvier à 10 h. du ſoir. Baromètre 28. 27. Vent d'Eſt, ciel à demi couvert.

La plus grande chaleur, 105 degrés, le 19 Juillet à 2 heures après midi. Baromètre 28. 25, vent SE, ciel ſerein, & temps conſtant.

La différence entre ces deux temperatures extrèmes 93 degrés de Délisle.

Le froid moyen: c'eſt à dire, la ſomme de toutes les hauteurs thermometriques obſervées le matin & le ſoir, diviſée par leur nombre:

I. Pour toute l'année, 147°, 9; d'1⅓ degré moindre que dans l'année moyenne.

II. Pour l'hyver de 1788 à 1789, en y comprenant les deux derniers mois de 1788: depuis le 1 Novembre 1788 jusqu'au 1 Mai 1789 = 167°, 6 &

Depuis le 1 Décembre 1788 jusqu'au 1 Avril 1789 = 173°, 9.

III. Pour l'été de 1789: depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre = 133°, 5, & depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre = 129°, 2.

La chaleur moyenne: ou bien la ſomme de toutes les hauteurs thermometriques obſervées à 2 heures après midi, diviſée par leur nombre:

I. Pour toute l'année = 138°, 8, d'1 degré plus grande que dans l'année moyenne.

II.

Digitized by Google

II. Pour l'hyver de 1788 à 1789: depuis le 1 Novembre 1788 jusqu'au 1 Mai 1789 = 158°, 3, & depuis le 1 Décembre 1788 jusqu'au 1 Avril 1789 = 164°, 3.

III. Pour l'été de 1789: depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre = 124°, 2, & depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre = 120°, 1.

Depuis le 1 Novembre 1788 jusqu'au 1 Mai 1789, ce qui fait un intervalle de 181 jours d'hyver, le froid obſervé aux heures du matin & du ſoir a ſurpaſſé 190 degrés en 14 jours, 180 degrés en 38 jours, 170 degrés en 77 jours 160 degrés en 120 jours & 150 degrés en 164 jours: il y avoient donc 17 jours où il n'a gélé point du tout. Enſuite dans ce même intervalle de 181 jours, le froid obſervé à 2 heures après midi a été en 168 jours plus petit que 180, en 145 jours plus petit que 170, en 105 jours plus petit que 160 & en 52 jours plus petit que 150: c'eſt à dire, il a dégelé en 52 après midis, & parmi ceux-ci il y avoient 17, où la chaleur à ſurpaſſé 140, & 3 où elle a ſurpaſſé 130 dégrés.

Enſuite depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1789, ce qui fait un intervalle de 184 jours d'été; la chaleur obſervée à 2 heures après-midi a ſurpaſſé en 7 jours 110 degrés, en 65 jours 120 degrés, en 134 jours 130 degrés & en 173 jours 140 degrés. Mais aux heures du matin & du ſoir, la chaleur a été plus petite que 130 en 108 jours, plus petite que 140 en 42 jours & plus petite que 150 degrés en 9 jours: ou bien il a gelé en 9 nuits.

Digitized by Google

La premiere gelée de l'hyver de 1788 à 1789 a été obſervée le 13 Octobre 1788, & la derniere le 5 Mai 1789: l'intervalle entre ces deux époques eſt de 204 jours. Enſuite depuis cette derniere gelée du 5 Mai jusqu'au 28 Septembre 1789, où il a recommencé à geler, ſe ſont écoulés 147 jours.

Cependant cette gelée du 28 Septembre n'a été que paſſagère, & il y a eu depuis encore pluſieurs jours d'été aſſés chauds; les gelées continues n'ont commencé que le 19 Octobre, de ſorte que l'intervalle de l'été depuis la derniere à la premiere gelée ſeroit, en donnant l'excluſion au ſeul 28 Septembre, de 168 jours.

On voit par ce reſumé: 1.) Que l'hyver de 1788 à 1789 a été beaucoup plus rude que l'hyver moyen, mais qu'il a été de 2 jours plus court. 2.) Que l'été de 1789 a été l'un des plus beaux; qu'il a été beaucoup plus chaud que l'été moyen, & que l'intervalle entre la derniere & la premiere gelée, ſi l'on excepte la ſeule journée du 28 Septembre, a été de 9 jours plus long que dans l'année moyenne.

III.

Digitized by Google

III. Vent.

1.) Tableau général de la force & de la direction des vents, pour chaque mois de l'année 1789.

Mois.	Calme jours.	Vent doux jours.	Vent fort jours.	Vent très fort jours.	Nord. jours.	NE. jours.	Eſt. jours.	SE. jours.	Sud. jours.	SOu. jours.	Oueſt. jours.	NOu. jours.
Janv.	2	21	7	1	0	5	2	3	13	5	1	2
Févr.	3	17	7	1	0	1	10	5	8	4	0	0
Mars	6	15	9	1	0	6	8	5	9	3	0	0
Avril	6	18	6	0	0	6	4	2	8	6	3	1
Mai	4	8	15	4	0	8	5	2	2	4	5	5
Juin	8	12	9	1	2	11	3	3	2	4	4	1
Juillet	9	15	6	1	1	1	11	3	2	2	10	1
Août	12	14	4	1	0	8	7	5	1	2	7	1
Sept.	5	10	13	2	0	4	11	6	1	0	8	0
Oct.	4	18	9	0	0	1	5	2	13	5	4	1
Nov.	1	21	5	3	4	1	5	3	6	7	3	1
Déc.	1	17	12	1	5	0	1	1	2	17	2	3
Année 1789.	61	186	102	16	12	52	72	40	67	59	47	16
I.	Depuis le 1 Nov. 1788 jusqu'au 1 Mai 1789 — 181. jours											
	33	104	37	7	2	29	36	21	55	26	6	6
II.	Depuis le 1 Mai 1789 jusqu'au 1 Novembre — 184 jours											
	42	77	56	9	3	33	42	21	21	17	38	9

2.)

2.) Rapport de la force des vents & des quatre plages: tiré du Tableau précédent pour chaque mois de l'année 1789.

Mois.	Degré de Force.	Rapp. des quatre plages.			
		Nord	Eſt	Sud	Oueſt.
Janvier	258	3	6	17	5
Février	260	1	13	12	2
Mars	258	3	13	13	2
Avril	220	3	8	12	7
Mai	361	7	10	5	9
Juin	253	7	11	6	6
Juillet	229	2	13	4	12
Août	206	5	13	5	8
Septembre	310	2	16	4	8
Octobre	246	1	6	17	7
Novembre	290	5	7	11	7
Décembre	293	6	2	11	2
Annee 1789.	265	45	118	117	85
Depuis le 1 Nov. 1788 jusqu'au 1 Mai 1789					
Hyver de 1788 à 89	246	19	60	78	24
Depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Nov. 1789					
Eté de 1789	267	22	70	41	51

3.)

Digitized by Google

3.) Enumeration détaillée des jours de grand vent.

Direction	Jours & Mois.	Nombre de jours
Nord.	Le 22. 23 Novembre & le 1 Décembre -	3
NE.	Le 11 — 13 Mars, le 30 Avril, le 1. 2. 21 — 24. 27. 28 Mai, le 11 — 13. 17 Juin, le 5 — 7. 10 Août, le 27 Sept. & le 19 Octobre - -	22
Eſt.	Le 17. 26 Février, le 14. 15. 16. 19 Mars, le 16 Avril, le 6. 25 Mai, le 21. 22. 26 Juillet, le 31 Août, & le 1. 7 — 10 Septembre - -	18
SE.	Le 3 Janv. le 25 Févr. le 17. 18 Mars, le 9 Avril, le 4. 27 Juin, le 2. 19. 20. Sept. & le 30 Déc.	11
Sud.	Le 2. 19 Janv. le 11. 15. 16 Février, le 28 Mars, le 7 Mai, le 23. 24 Juin, le 3 Juillet, le 1 — 6. 30 Octobre, & le 7 Novembre - - -	18
SOu.	Le 20. 21. 26. 27 Janvier, le 19. 20 Févr., le 13. 28 Avril, le 8. 11. 12 Mai, le 28 Juin, le 9 Juillet, le 31 Octobre, le 2. 17. 25 Nov. & le 4. 7. 8. 14. 15. 20. 23. 25. 28. 29 Décembre	27
Oueſt.	Le 3. 9. 13 Mai, le 15 Juin, le 12. 15 Juillet, le 4. 5. 11 — 14 Sept. & le 26. 27 Novembre -	14
NOu.	Le 7 Janv. le 26 Avril, le 14. 30 Mai, & le 24 Déc.	5
	En tout	118

Direction	Parmi ces vents ſe trouvoient être les plus violens, ceux	Nombre de jours.
Nord.	du 22 & 23 Novembre - - - - - -	2
NE.	du 22. 23 Mai, & du 6 Août - - -	3
SE.	du 18 Mars & 4 Juin - - - - - -	2
SOu.	du 21 Janv. 20 Févr. 11 Mai, 9 Juillet & 23 Déc.	5
Oueſt.	du 13 Mai, 12. 13 Septembre & 27 Novembre -	4
	Somme des jours orageux	16

L'été

L'été de 1789 a donc été plus venteux que l'hyver de 1788 à 1789. Le mois le plus venteux eſt celui de Mai ; & le plus calme, celui d'Août.

Les vents dominans de toute l'année ſe trouvent être ceux de l'Eſt & du Sud : le premier a ſurtout dominé en été, & celui du Sud en hyver.

IV. Atmoſphère.

Mois.	Ciel. ſerein jours.	Ciel. couvert jours	Brouillard jours.	Pluie. forte jours.	Pluie. petite jours.	Neige. forte jours.	Neige. petite jours.
Janvier	7	14	3		1		6
Février	6	11	11		1		7
Mars	11	10	6		0	1	8
Avril	10	8	3		6	2	4
Mai	13	3	3	2	6		
Juin	14	4	1	5	9		
Juillet	19	5	9	2	5		
Août	14	4	13	2	9		
Septem.	7	9	6	1	12		
Octobre	9	10	4		8		
Novem.	0	19	1		10	2	8
Décem.	3	18	3		10		8
Année 1789.	113	115	63	12	77	5	41
				89		46	
Depuis le 1 Nov. 1788 jusqu'au 1 Mai 1789.							
Hyver de 1788 à 1789.	53	68	42	0	12	3	43
				12		46	
Depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1789.							
Eté de 1789.	76	35	36	12	49		
				61			

Le

Le nombre des jours ſereins & celui des brouillards a donc été en 1789 conſidérablement plus grand que dans l'année moyenne: mais le nombre des jours de pluie & de neige a été plus petit, & même le premier de 11, & le ſecond de 24 moindre, que dans l'année moyenne.

Il gréla le 24 Juin, le 14 Août, & le 30 Octobre.

Il neigea pour la derniere fois le 14 Avril & il recommença à neiger le 1 Novembre, après un intervalle de 200 jours, qui eſt de 41 jours plus long que l'intervalle moyen. L'année 1788, la premiere neige tomba le 17 Septembre, de ſorte que pour l'hyver de 1788 à 1789, l'intervalle entre la premiere & la derniere neige ait été de 178 jours, de 28 jours plus grand que le nombre moyen.

Il y eut 8 orages complets, le 11 Mai, le 26. 30 Juin, le 9. 10 Juillet, le 14. 15 Août & le 2 Septembre. Il tonna de loin le 27 Avril, le 15 Mai, le 24 Juin, le 24 Juillet, le 26 & 27 Août. Il fit des éclairs de nuit le 3 Avril & le 1 Septembre.

Le nombre des Aurores boréales obſervées fut 15, dont 8 furent conſidérables; ſavoir celles du 27. 28 Mars, du 19. 24 Août, du 19. 24 Octobre, du 14. & 30 Novembre.

Les autres 7 moins brillantes furent remarquées le 2 Avril, 21 Août, 16 Septembre, 11. 18. 20 Octobre, & 21 Novembre.

En Janvier fut obſervé le 14 matin un parhélie d'une lumiere fort vive & le 11 un paraſélene.

La

La Neva débacla le 30 Avril, après avoir été couverte de glace pendant l'hyver de 1788 à 1789 de 164 jours, de 21 jours plus grand que le moyen intervalle entre la priſe & la débacle. Baromètre pendant cette débacle 28, 28 à 28, 08 pouces. Thermomètre de Délisle de 144 à 132. Vent de NE, ciel couvert, brouillard & neige. La riviere ne charia ſes glaces que le 30 Avril & le 1 Mai. Les glaces du Ladoga parurent dans la nuit du 6 à 7 Mai, & la riviere en charia encore le 8, mais en petite quantité.

Le 24 Novembre matin ſe formerent les premieres glaces, que le grand froid qu'il fit, augmenta conſidérablement: de ſorte qu'on fut obligé d'écarter les pontons déja à 11 heures avant midi. Enfin le lendemain 25 Novembre au ſoir, la Neva ſe trouvant tout à fait couverte de glaces, elle ſe gela par un froid de 175 degrés: Baromètre 28. 31. ciel ſerein, vent d'Oueſt. L'Intervalle entre la débacle & la priſe a donc été en 1789, de 209 jours par conſéquent de 13 jours moindre que dans l'année moyenne.

Digitized by Google

Elev. Poli β Gr.	Angulus ad centrum β′ Gr. M. S.	Diſtantia ab Aeqvatore x	orrectio						
			x	*y*	*z*	*t*	*η*	*p*	*s*
			—	+	—	+	+	—	—
0	0. 0. 0.	0,00000	0	0	0		0	23	0
1	0. 59. 29.	0,01730	23	0	0	13	0	22	23
2	1. 58. 58.	0,03459	45	1	1	26	0	22	45
3	2. 58. 27.	0,05188	68	2	2	36	0	23	67
4	3. 57. 56.	0,06915	91	3	3	45	0	22	90
5	4. 57. 25.	0,08640	113	4	5	57	0	23	112
6	5. 56. 54.	0,10362	135	7	7	70	0	22	135
7	6. 56. 24.	0,12082	157	10	10	80	0	23	157
8	7. 55. 54.	0,13797	179	13	13	92	0	22	180
9	8. 55. 24.	0,15509	201	16	16	100	1	22	202
10	9. 54. 55.	0,17216.	222	19	20	109	1	21	224
11	10. 54. 25.	0,18918	243	23	24	122	1	21	245
12	11. 53. 56.	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Digitized by Google

Elev. Poli β Gr.	Angulus ad centrum β′ Gr. M. S.	Diſtantia ab Aeqvatore x	Correctio					
			y	z	t	η	p	s
			+	—	+	+	—	—
45	44. 45. 1.	0,702498	0,231	323	326	4	5	745
46	45. 45. 2.	0,714704	0,235	334	326	4	5	750
47	46. 45. 3.	0,726696	0,239	345	325	4	4	755
48	47. 45. 6.	0,738468	0,241	358	324	4	4	759
49	48. 45. 9.	0,750017	0,245	369	324	4	3	763
50	49. 45. 14.	0,761338	0,247	380	323	5	3	766
51	50. 45. 20.	0,772430	0,249	393	320	4	2	769
52	51. 45. 27.	0,783287	0,250	404	317	5	2	771
53	52. 45. 35.	0,793906	0,251	414	315	4	2	773
54	53. 45. 44.	0,804285	0,252	424	311	4	+	775
55	54. 45. 54.	0,814418	0,253	435	309	4	1	775

Digitized by Google

Digitized by Google

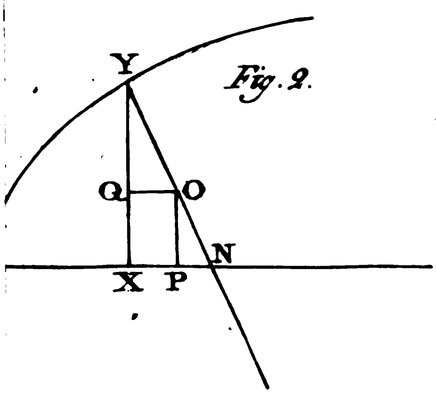


Fig. 2.

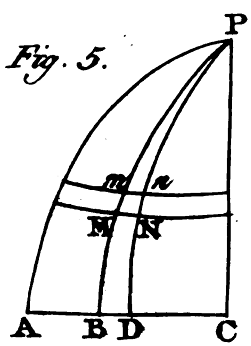


Fig. 5.

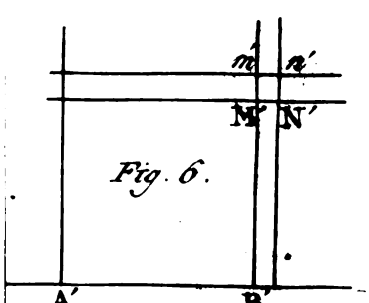


Fig. 6.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 2.

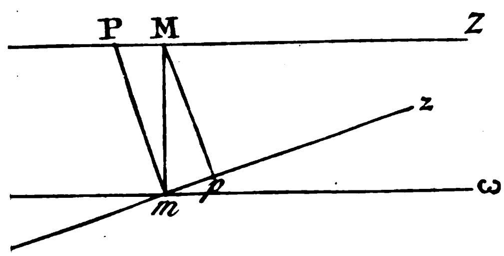
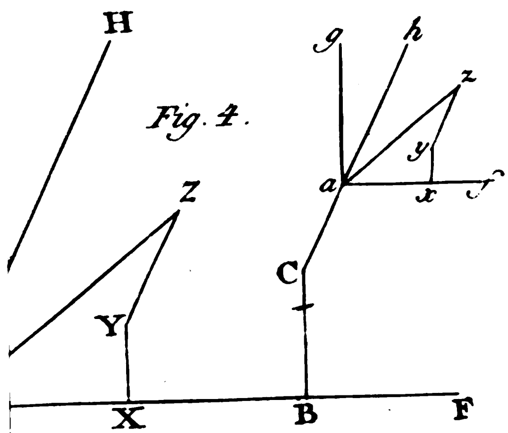
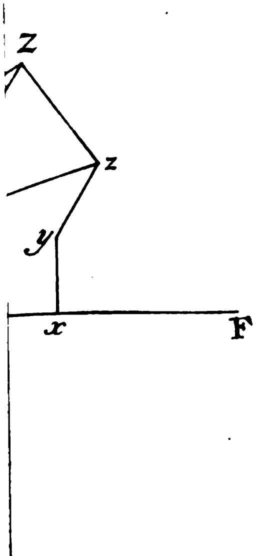


Fig. 4.





Digitized by Google

Digitized by Google

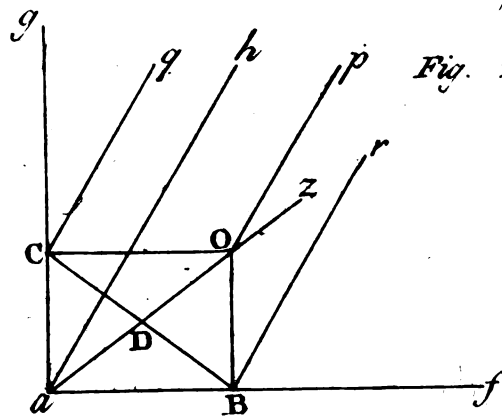


Fig. 2.

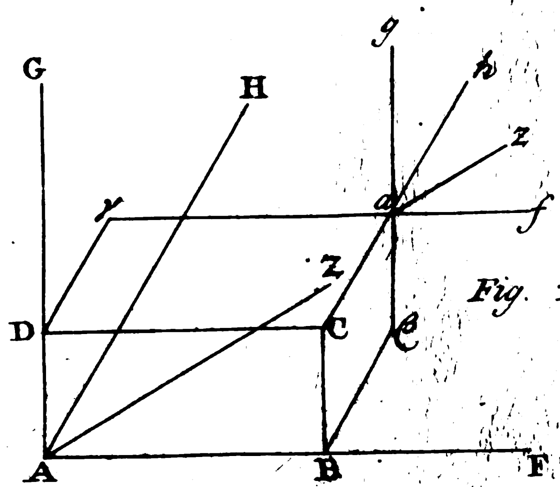


Fig. 4.

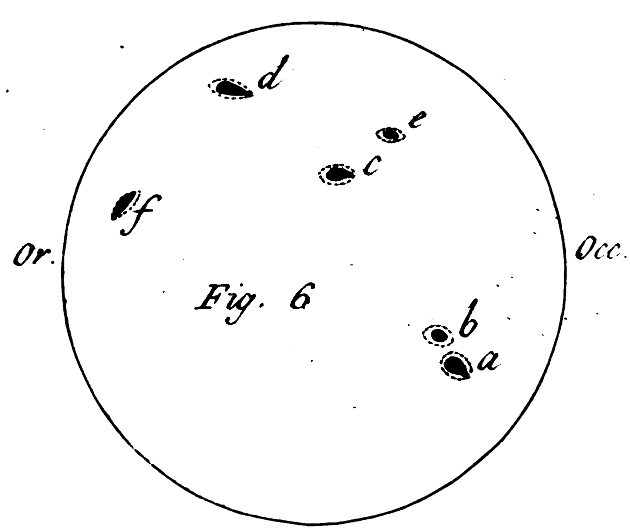
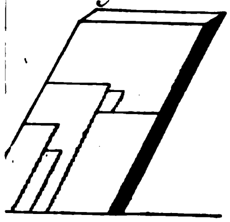


Fig. 6

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 6.



ad. Tab. IV.

Fig. 7.

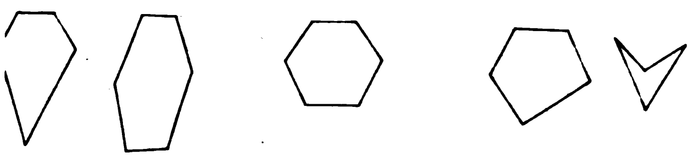


Fig. 3.

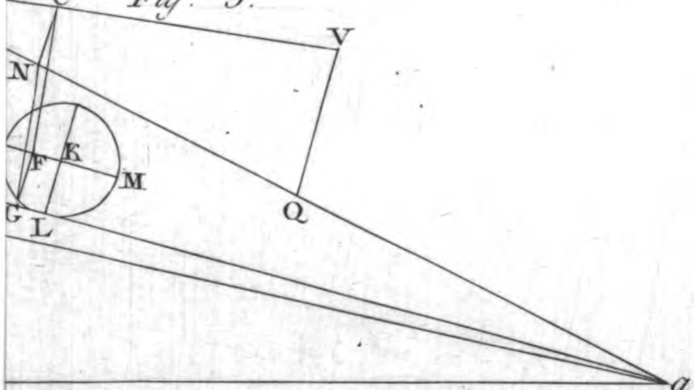
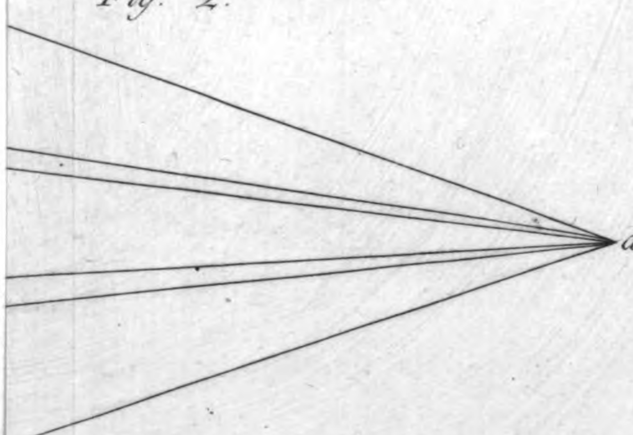


Fig. 2.



Digitized by Google

Digitized by Google

.2.



Fig. 3.



Fig. 4.



Fig. 5.



Fig. 6.



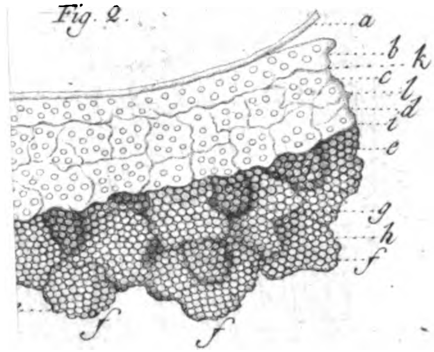
Fig. 7.



Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 2.



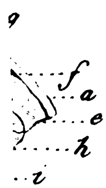
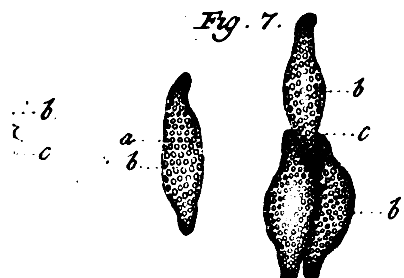


Fig. 4.



Fig. 7.



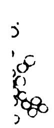
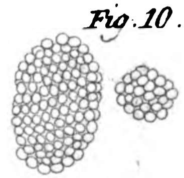
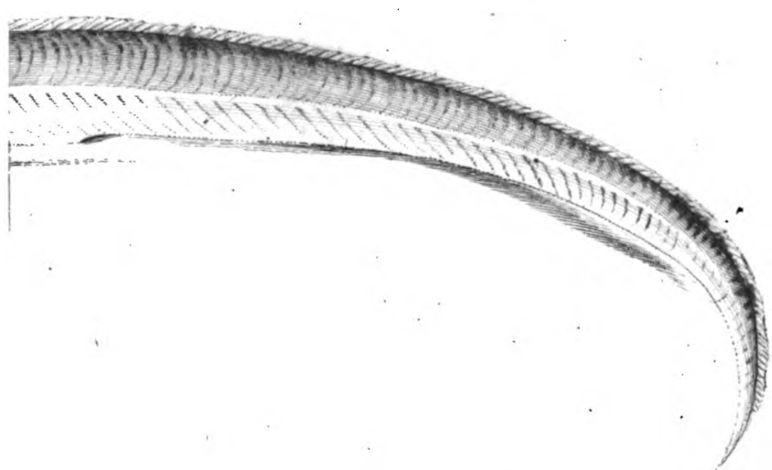


Fig. 10.



ig. 11.

Digitized by Google



Digitized by Google

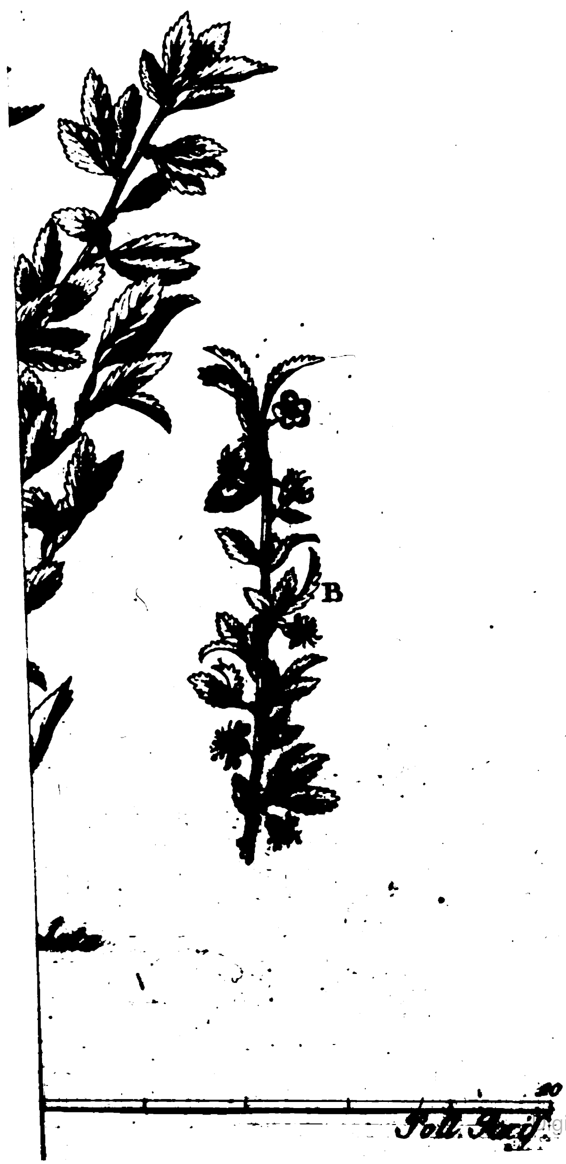
Digitized by Google

Acad. Imp. Sc. Petrop. Tom. VII. Tab. VIII.

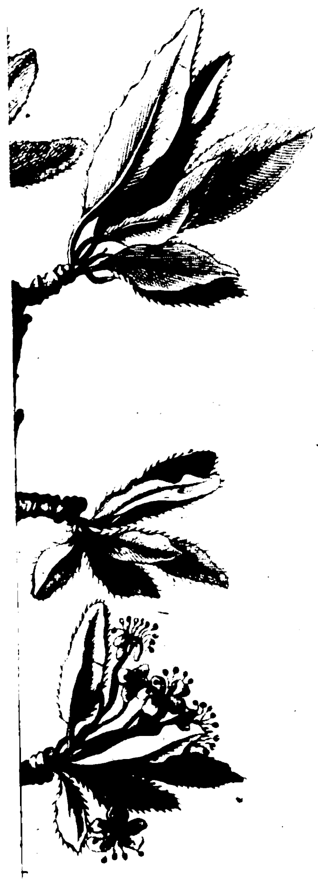


Digitized by Google

Digitized by Google



igitized by Google



elaeagrifolia

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

H-5

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

SEP 3 1937

Digitized by Google

Digitized by Google